Distribuzioni di probabilità

1. Variabili aleatorie e distribuzioni discrete

Un nuovo concetto di variabile

Nell'ambito del calcolo della probabilità si introduce un nuovo concetto di «variabile», quello di *variabile aleatoria*, che è fondamentale in svariate applicazioni.
Consideriamo per esempio l'esperimento che consiste nel lancio di due dadi regolari, e indichiamo con X la somma dei due numeri ottenuti. La lettera X rappresenta una variabile, che può assumere i valori:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

Essa è l'esempio di una **variabile aleatoria**.
Intuitivamente, una variabile aleatoria è una *variabile i cui valori sono numeri reali determinati dall'esito di un esperimento aleatorio*. Per esempio, sono variabili aleatorie:
- T che rappresenta il numero di «testa» uscite nel lancio di 100 monete;
- H che rappresenta l'altezza di una persona scelta a caso nella popolazione;
- N che rappresenta il numero di autovetture che giungono in un giorno a un casello autostradale.

Una variabile aleatoria, tuttavia, si può anche interpretare come *funzione*; per esempio, riconsideriamo la variabile aleatoria X «somma dei due numeri ottenuti nel lancio di due dadi»: essa si può interpretare come la *funzione* che associa a ogni possibile esito del lancio la somma dei due numeri ottenuti. Questa osservazione consente di dare una definizione più formale di variabile aleatoria.

VARIABILE ALEATORIA
Si chiama **variabile aleatoria** (o **variabile casuale**) una funzione che associa a ogni possibile esito di un esperimento aleatorio un numero reale.

Se Ω è lo spazio campionario di un esperimento aleatorio e X è una variabile aleatoria relativa all'esperimento, in base alla definizione data risulta $X : \Omega \to \mathbf{R}$.

ESEMPIO **La variabile aleatoria come funzione**

Consideriamo l'esperimento che consiste nel lancio di 3 monete equilibrate, e indichiamo con X il numero di «testa» che si ottiene. Rappresentiamo la variabile aleatoria X, intesa come funzione.

In base a quanto abbiamo detto poc'anzi, X non è altro che la funzione che associa a ogni possibile esito del lancio delle tre monete il numero complessivo di «testa» ottenuto. Lo spazio campionario Ω è l'insieme:

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}$$

e i valori che può assumere la variabile aleatoria sono 0, 1, 2, 3. Quindi:

$$X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$$

La funzione X può essere rappresentata tramite il diagramma a frecce in fig. 11.1.

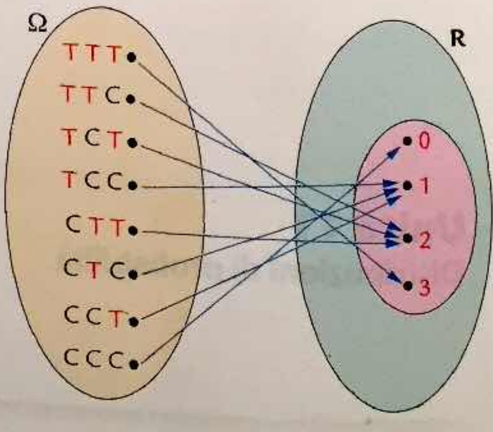

Figura 11.1

Una variabile aleatoria X che assume un numero *finito* n di valori si dice **discreta**. L'evento: «X assume il valore x_i» (dove i è un intero qualsiasi compreso tra 1 e n) si rappresenta con il simbolo $X = x_i$.
Possiamo anche calcolare la probabilità dell'evento $X = x_i$: essa è uguale alla somma delle probabilità degli eventi elementari la cui immagine tramite X è uguale a x_i.

Per la precisione

Si chiamano *discrete* anche le variabili aleatorie che assumono una *infinità numerabile* di valori, cioè tali che l'insieme dei valori assunti dalla variabile può essere messo in corrispondenza biunivoca con N. Non ci occuperemo tuttavia di variabili aleatorie di questo tipo.

ESEMPIO

Consideriamo la variabile aleatoria X che esprime il numero di «testa» uscite nel lancio di tre monete equilibrate. Determiniamo la probabilità degli eventi:

$X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ e $X = 3$

Si tratta della variabile aleatoria che abbiamo rappresentato in fig. 11.1. Osserviamo che:

- la probabilità che sia $X = 0$ è uguale alla probabilità dell'evento elementare CCC, quindi vale $\frac{1}{8}$;
- la probabilità che sia $X = 1$ è la somma delle probabilità dei tre eventi elementari TCC, CTC, CCT, quindi è uguale a $\frac{3}{8}$;
- la probabilità che sia $X = 2$ è la somma delle probabilità dei tre eventi elementari TTC, TCT, CTT, quindi è uguale a $\frac{3}{8}$;
- la probabilità che sia $X = 3$ è uguale alla probabilità dell'evento elementare TTT, quindi vale $\frac{1}{8}$.

Formalmente scriviamo:

$$p(X = 0) = \frac{1}{8} \qquad p(X = 1) = \frac{3}{8} \qquad p(X = 2) = \frac{3}{8} \qquad p(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Distribuzioni di probabilità

Supponendo ancora che X sia una variabile aleatoria discreta che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, possiamo associare a ciascuno degli eventi $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ la rispettiva probabilità: si definisce così una funzione, cui si dà un nome particolare.

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DI UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con probabilità rispettive $p_1, p_2, \ldots, p_n$; si chiama **distribuzione di probabilità** (o **densità**) della variabile aleatoria X la funzione che associa a ciascun x_i la rispettiva probabilità p_i.

La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta si rappresenta tramite una tabella del tipo mostrato qui sotto.

x_i	x_1	x_2	......	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	......	p_n

Poiché gli eventi $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ sono *disgiunti* e la loro *unione* è Ω, ne segue che è sempre $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

ESEMPIO **Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta**

Determiniamo la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X che esprime il numero di «testa» uscite nel lancio di tre monete equilibrate.

Si tratta ancora della variabile aleatoria che abbiamo rappresentato in fig. 11.1. Ricordiamo che X può assumere i valori: 0, 1, 2, 3.

→

Nell'ultimo esempio abbiamo ricavato che le probabilità degli eventi:

$X = 0$ $\quad X = 1$ $\quad X = 2$ $\quad X = 3$

sono rispettivamente: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$. Pertanto la distribuzione di probabilità di X è:

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Puoi verificare che: $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

Avrai notato la similitudine fra il concetto di distribuzione di *probabilità* e quello di distribuzione di *frequenze relative* studiato in statistica. La similitudine continua anche nella definizione dei concetti di *media, varianza* e *deviazione standard* di una variabile aleatoria discreta.

Osserva

1. Il simbolo standard $E(X)$ utilizzato per indicare la media di una variabile aleatoria X deriva dall'inglese *Expectation*, che significa «valore atteso».
2. Continuano a valere, per la media di una variabile aleatoria, proprietà analoghe a quelle viste per la media in statistica. In particolare, il valore medio di una variabile aleatoria è lineare, vale a dire: se a e $b \in \mathbb{R}$, e X è una variabile aleatoria, risulta: $E(aX + b) = aE(X) + b$.

MEDIA, VARIANZA E DEVIAZIONE STANDARD DI UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA

Sia X una variabile aleatoria discreta che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con probabilità rispettive $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

a. Si chiama **media** (o **valore atteso** o **speranza matematica**) della variabile aleatoria X, e si indica con il simbolo $E(X)$ o con la lettera μ, il numero:

$$\mu = E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

b. Si definisce **varianza** di X, e si indica con il simbolo $V(X)$ o con il simbolo σ^2, il numero così definito:

$$\sigma^2 = V(X) = [x_1 - E(X)]^2 \cdot p_1 + [x_2 - E(X)]^2 \cdot p_2 + \ldots + [x_n - E(X)]^2 \cdot p_n$$

c. Si definisce **deviazione standard** (o **scarto quadratico medio**) di X, e si indica con il simbolo $s(X)$ (o con la lettera σ) la radice quadrata della sua varianza.

Intuitivamente, la *media* di una variabile aleatoria fornisce un valore che approssima la media aritmetica dei valori assunti dalla variabile, quando si esegue un numero k di prove: l'approssimazione è tanto migliore quanto più grande è k; la *varianza* e la *deviazione standard* sono invece indici che forniscono una misura della «dispersione» dei valori della variabile aleatoria intorno alla sua media.
Similmente a quanto visto in statistica, per il calcolo della *varianza* di una variabile aleatoria sussiste anche la seguente **formula alternativa ridotta**, che permette un minor numero di calcoli:

$$V(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_n^2p_n - [E(X)]^2$$

ESEMPIO **Media, varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria**

Determiniamo media, varianza e deviazione standard della variabile aleatoria X che esprime il numero di «testa» uscite nel lancio di tre monete equilibrate.

Ricordiamo la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X che abbiamo calcolato nell'esempio precedente.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

In base alle definizioni date poc'anzi abbiamo:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Valore medio

$$V(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Utilizzando la formula ridotta per il calcolo della varianza

$$s(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{3}{4}} \simeq 0,87$$

Deviazione standard

Giochi equi

Tramite il concetto di valore medio di una variabile aleatoria possiamo costruire un modello matematico che consente di valutare l'*equità* di un gioco.
Intuitivamente, un gioco è:

- *equo* se, alla fine di molte partite, il giocatore si trova circa nelle stesse condizioni di partenza, senza né grandi vincite né grandi perdite;
- *favorevole* al giocatore se, alla fine di molte partite, il giocatore realizza una vincita;
- *sfavorevole* al giocatore se, alla fine di molte partite, il giocatore si trova in perdita.

Queste considerazioni intuitive si possono formalizzare considerando la variabile aleatoria X che rappresenta la somma complessiva vinta o persa da un giocatore dopo una partita (tenendo conto anche dell'eventuale cifra sborsata all'inizio del gioco per partecipare a esso) e calcolando il *valore medio* di tale variabile aleatoria:

- se il valore medio di X è *nullo*, il gioco è **equo**;
- se il valore medio di X è *positivo*, il gioco è **favorevole** al giocatore;
- se il valore medio di X è *negativo*, il gioco è **sfavorevole** al giocatore.

ESEMPIO **Gioco equo**

In un gioco Tizio lancia un dado: se esce un numero pari deve pagare 2 euro; se esce la faccia 1 vince 5 euro, se esce 3 non succede nulla; se esce la faccia 5 vince 1 euro. Si tratta di un gioco equo?

Sia X la variabile aleatoria che esprime la somma complessiva, in euro, vinta o persa da Tizio dopo una partita. Le possibilità sono le seguenti:

- esce un numero pari (ossia 2, 4 o 6): Tizio deve pagare 2 euro, quindi $X = -2$;
- esce 1: Tizio vince 5 euro, quindi $X = 5$;
- esce 3: Tizio non vince e non perde nulla, quindi $X = 0$;
- esce 5: Tizio vince 1 euro, quindi $X = 1$.

I valori che può assumere la variabile aleatoria X sono dunque:

$-2, 0, 1, 5$

La distribuzione di probabilità di X è rappresentata nella seguente tabella.

Valori di X	-2	0	1	5
Probabilità	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Il valore medio di X è:

$$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = -1 + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 0$$

Si tratta quindi di un gioco *equo*. Giocando un gran numero di volte, si può supporre che alla fine Tizio si troverà all'incirca nella condizione iniziale.

ESEMPIO **Il gioco del lotto è equo?**

La probabilità di realizzare un ambo al gioco del lotto (giocando due numeri) è $p = \frac{2}{801}$. Se si punta 1 euro sull'uscita di un ambo, quale dovrebbe essere l'incasso equo in caso di vittoria?

Sia X la variabile aleatoria che esprime la somma complessiva in euro vinta o persa da un giocatore dopo un'estrazione del lotto.
Si possono presentare due eventualità:

- se il giocatore non realizza l'ambo, perde l'euro che ha puntato, quindi $X = -1$;
- se il giocatore realizza l'ambo, dopo avere pagato inizialmente 1 euro per la puntata, vince una somma V, quindi $X = V - 1$.

La distribuzione di probabilità di X è dunque:

Valori di X	-1	$V-1$
Probabilità	$1 - \frac{2}{801}$	$\frac{2}{801}$

Attenzione!
Osserva che i due eventi: «il giocatore **non** realizza l'ambo» e: «il giocatore realizza l'ambo» sono contrari, quindi la probabilità del primo è 1 meno la probabilità del secondo.

Affinché il gioco sia *equo* il valore medio di X deve essere 0. Quindi deve risultare:

$$-1 \cdot \left(1 - \frac{2}{801}\right) + (V-1) \cdot \frac{2}{801} = 0$$

Risolvendo questa equazione nell'incognita V, si ricava:

$$V = 400{,}5$$

L'incasso equo, a fronte di una puntata di 1 euro, sarebbe dunque di 400,50 euro. In realtà, al gioco del lotto, l'ambo viene pagato solo 250 volte la posta giocata: **non** si tratta quindi di un gioco equo. Giocando un gran numero di volte, si può supporre che alla fine un giocatore si troverà in *perdita*.

Prova tu **ESERCIZI** a p. 724

1. Si lancia due volte una moneta. Determina la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X: «numero di 'testa' ottenuto nei due lanci». Calcola quindi il valore medio, la varianza e la deviazione standard di X.
$\left[\text{Valore medio} = 1, \text{ varianza} = \frac{3}{2}, \text{ deviazione standard} = \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$
2. Il biglietto di una lotteria costa 2 euro. Sapendo che il montepremi complessivo è di 1 milione di euro, quanti biglietti si dovrebbero vendere per garantire un gioco equo? [500 000]

2. Distribuzione binomiale

Il concetto di variabile aleatoria permette di costruire dei modelli generali, applicabili a vaste classi di problemi. Tra i modelli che fanno riferimento a variabili aleatorie *discrete* ci limiteremo a studiare i due più importanti: il *processo di Bernoulli* (in questo paragrafo) e il *processo di Poisson* (nel prossimo). Iniziamone lo studio con una definizione preliminare.

Scritture equivalenti
Talvolta «successo» e «insuccesso» vengono indicati rispettivamente con 1 e con 0.

ESPERIMENTO DI BERNOULLI
Si dice **esperimento** (o **prova**) **di Bernoulli** un esperimento aleatorio che può avere solo due possibili esiti. Conveniamo di chiamare «successo» l'esito che interessa e «insuccesso» l'altro esito possibile. La probabilità p di successo in un esperimento di Bernoulli si dice **parametro** dell'esperimento.

ESEMPI Prove di Bernoulli

1. Si lancia una moneta e si vince se esce «testa». Questo esperimento aleatorio è una prova di Bernoulli, dove si considera come «successo» l'esito «testa»; il parametro di questa prova di Bernoulli è $p = \frac{1}{2}$.
2. È noto che mediamente il 5% dei pezzi prodotti in una giornata da un'azienda hanno dei difetti. La scelta a caso di un pezzo tra quelli prodotti e la verifica se sia difettoso si possono assimilare a una prova di Bernoulli, dove si considera come «successo» l'evento che consiste nell'aver trovato un pezzo difettoso. Il parametro di questa prova di Bernoulli è $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

Supponiamo ora di eseguire ripetutamente n prove di Bernoulli **identiche** e **indipendenti** tra loro, vale a dire supponiamo che le prove si verifichino tutte nelle stesse condizioni (in modo, quindi, che la probabilità di avere un successo sia la stessa in ogni prova) e che l'esito di un singolo esperimento **non** abbia influenza sull'esito degli altri esperimenti: il processo che ne risulta è il modello adatto a descrivere moltissimi fenomeni, perciò gli si è dato un nome specifico.

PROCESSO DI BERNOULLI

Si chiama **processo di Bernoulli** l'esperimento aleatorio consistente nella ripetizione di n prove di Bernoulli identiche e indipendenti.

Osserva

Il parametro n è un numero intero positivo, mentre il parametro p è un numero reale con $0 < p < 1$.

Per esempio, sono processi di Bernoulli il lancio ripetuto per n volte di una moneta, oppure l'estrazione con reinserimento, per n volte successive, di una pallina da un'urna che contiene palline di due soli colori.

VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE

Consideriamo un processo di Bernoulli costituito da n prove di parametro p. La variabile aleatoria X che conta il numero complessivo di successi ottenuti nelle n prove si dice **binomiale** di parametri n e p.

Distribuzione di una variabile aleatoria binomiale — TEOREMA 11.1

Sia X una variabile aleatoria **binomiale** di parametri n e p. La **distribuzione di probabilità** di X è data dalla formula:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, ..., n$$

DIMOSTRAZIONE

1. Dobbiamo calcolare la probabilità che sia $X = k$, cioè la probabilità di avere k successi in n prove.
2. La probabilità di ottenere, in n prove, una *particolare* sequenza di k successi e $(n - k)$ insuccessi, per l'*indipendenza* delle prove, è uguale a $p^k(1 - p)^{n-k}$.
3. Le *diverse sequenze possibili* costituite da k successi e $n - k$ insuccessi sono in tutto $\binom{n}{k}$. Infatti una particolare sequenza di questo tipo è individuata univocamente una volta che sono note le k posizioni dei successi (perché ovviamente tutte le altre posizioni saranno occupate da insuccessi) e i modi in cui si possono scegliere k posizioni tra n è uguale a $\binom{n}{k}$.
4. Poiché gli $\binom{n}{k}$ modi in cui possono realizzarsi k successi sono eventi incompatibili, la probabilità dell'evento $X = k$ è la *somma delle probabilità* di tutti questi eventi incompatibili, quindi è uguale a $\binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$.

Per indicare che una variabile aleatoria ha distribuzione binomiale di parametri n e p si utilizza la scrittura $X \sim B(n, p)$, da leggere «X segue la **distribuzione binomiale** di parametri n e p».
I diagrammi a barre in fig. 11.2 rappresentano le distribuzioni di probabilità di alcune variabili aleatorie binomiali in cui $n = 10$.

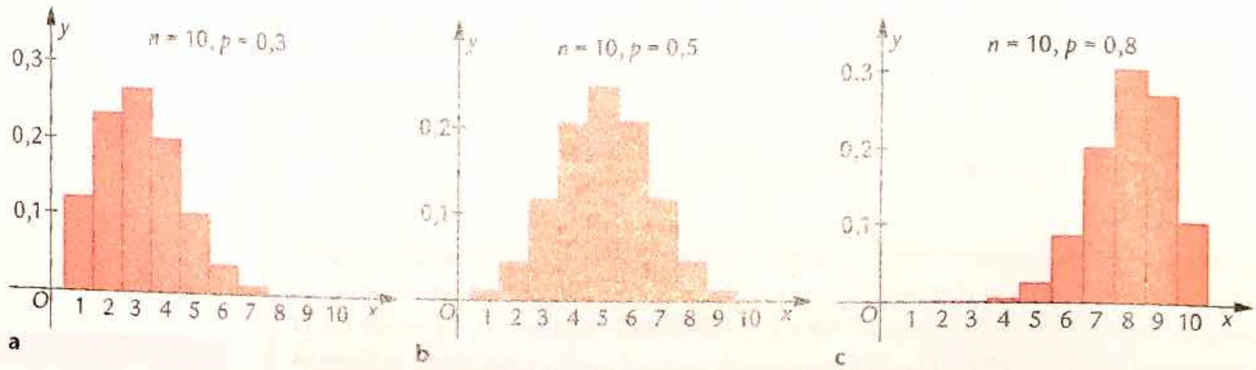

Figura 11.2 Se $p = 0{,}5$ la distribuzione è simmetrica rispetto a $\frac{n}{2}$ (vedi fig. **b** in cui $n = 10$, quindi $\frac{n}{2} = 5$), mentre se $p < 0{,}5$ ($p > 0{,}5$) la densità è «sbilanciata» verso lo 0 (oppure verso n) come mostrano le figg. **a** e **c**.

Circa la media e la varianza di una variabile aleatoria binomiale, si potrebbe dimostrare quanto segue.

TEOREMA 11.2 **Media e varianza di una variabile aleatoria binomiale**

Sia X una variabile aleatoria **binomiale** di parametri n e p. Allora la **media** e la **varianza** di X sono assegnate dalle formule:

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1 - p)$$

Figure dinamiche

Puoi visualizzare come varia una distribuzione binomiale al variare dei suoi parametri tramite le figure dinamiche disponibili on-line.

ESEMPIO **Test a risposta multipla**

In un compito in classe Paolo deve rispondere a 5 quesiti a risposta multipla: ogni quesito è costituito da 4 risposte, di cui una sola è quella esatta.
Paolo risponde a caso a tutti i quesiti.

a. Qual è la probabilità che dia 3 risposte esatte?
b. Qual è il numero medio di risposte esatte che Paolo può aspettarsi di avere dato?

a. La risposta a un singolo quesito è un esperimento di Bernoulli, con probabilità di successo uguale a $p = \frac{1}{4}$; le risposte ai 5 quesiti costituiscono un processo di Bernoulli di 5 prove, di parametro p.
La variabile X che conta il numero complessivo di risposte esatte date è quindi una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 5$, $p = \frac{1}{4}$.
La probabilità che Paolo abbia dato tre risposte esatte è allora:

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} = \frac{45}{512} \simeq 0{,}088 = 8{,}8\%$$

b. Il numero medio di risposte che Paolo può aspettarsi di aver dato è uguale al valore medio di X:

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1{,}25$$

Prova tu

ESERCIZI a p. 727

Da un'urna contenente 10 palline, di cui 4 bianche e 6 nere, si effettuano quattro estrazioni successive di una pallina, con reimmissione. Qual è la probabilità di estrarre esattamente 2 palline nere?

$\left[\frac{216}{625}\right]$

3. Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson

Un'importante distribuzione di probabilità discreta, che ha una vasta gamma di applicazioni in aree diverse, è la cosiddetta **distribuzione di Poisson**. Essa può venire ricavata come approssimazione della distribuzione binomiale, secondo il procedimento che ora spieghiamo.

1. Consideriamo una variabile aleatoria binomiale X di parametri n e p; sappiamo che:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Indichiamo inoltre con λ il valore medio di X, cioè poniamo $\lambda = np$.

2. Esprimiamo la probabilità che sia $X=k$ in funzione di λ e di n.

Poiché $\lambda = np$, ne segue che $p=\frac{\lambda}{n}$, dunque:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \qquad [11.1]$$

3. Supponiamo ora che n sia «molto grande» $\left(\text{e di conseguenza che } p \text{ sia «molto piccolo» dal momento che } p=\frac{\lambda}{n}\right)$; in tal caso il valore della [11.1] può essere approssimato dal suo limite per n che tende a più infinito:

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k\text{ fattori decrescenti}}}{k!}\,\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}}_{\substack{\text{è un rapporto}\\\text{di polinomi di grado }k\\\text{quindi tende a 1 per }n\to+\infty}}\quad\underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}}_{\substack{\text{è costante}\\\text{indipendente}\\\text{da }n}}\quad\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\substack{\text{tende a }e^{-\lambda}\\\text{per il limite}\\\text{notevole [2.23]}}}\quad\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\substack{\text{tende a 1}\\\text{per }n\to\infty}}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Riassumendo: se X è una variabile aleatoria binomiale tale che n è «grande» e p è «piccolo», vale la seguente approssimazione:

$$p(X=k)\simeq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\qquad \text{dove } \lambda = np \qquad [11.2]$$

La formula [11.2] definisce la distribuzione di Poisson.

Attenzione!
Si può verificare che l'approssimazione [11.2] risulta soddisfacente se $n>50$ e $np<10$.

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Una variabile aleatoria discreta X è detta **di Poisson** di parametro λ, con $\lambda > 0$, se la sua distribuzione di probabilità è assegnata da:

$$p(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\qquad \text{con } k=0,1,2,\ldots$$

In simboli
Per indicare che una variabile aleatoria X è di Poisson di parametro λ si utilizza la scrittura $X \sim P(\lambda)$.

Circa la media e la varianza di una distribuzione di Poisson, si potrebbe dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 11.3 **Media e varianza di una variabile aleatoria di Poisson**

Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ; allora sia la **media** sia la **varianza** di X sono uguali a λ:

$$E(X) = \lambda; \quad V(X) = \lambda$$

La distribuzione di Poisson nella modellizzazione

La distribuzione di Poisson non è utile soltanto per calcolare approssimativamente probabilità relative a variabili aleatorie binomiali in cui n è grande e p è piccolo, ma riveste un ruolo di particolare importanza ai fini della modellizzazione di fenomeni aleatori. Essa è infatti il modello adatto a interpretare le situazioni descritte da una variabile aleatoria binomiale di cui conosciamo il *valore medio*, ma non i valori esatti di n e p, purché sia lecito supporre n «grande» e p «piccolo».

Dalla storia

La distribuzione di Poisson venne introdotta da **S.D. Poisson** nell'ambito dei suoi studi circa le applicazioni del calcolo della probabilità alle cause civili e ai processi. Essa fu a lungo ignorata, finché non si scoprì che il numero di particelle α emesse da una sostanza radioattiva in un dato intervallo di tempo non ha un valore fisso ma è una variabile aleatoria ben interpretata da una distribuzione di Poisson.

ESEMPIO **Arrivi di telefonate a un centralino/1**

Al centralino di un numero verde, in un'ora di punta, arriva un numero medio di 120 telefonate. Qual è la probabilità che il numero effettivo di telefonate arrivate a quel centralino in un'ora di punta sia 110?

- **Modellizzazione del problema**

Indichiamo con la variabile aleatoria X il numero *effettivo* di telefonate che arrivano al centralino in un'ora di punta. Supponiamo che il numero n di «utenti potenziali» del centralino sia *molto alto*, che la probabilità p che un singolo utente telefoni al centralino sia *molto bassa* e che ciascun utente telefoni o meno al centralino *indipendentemente* dagli altri. Sotto queste ipotesi il numero X di telefonate effettivamente giunte al centralino si può assimilare al numero di successi in un processo di Bernoulli di n prove di parametro p. Non conosciamo i valori esatti di n e di p, tuttavia conosciamo il valore medio di X (uguale a 120); inoltre, in base alle ipotesi fatte, è lecito supporre che n sia grande e p sia piccolo: dunque siamo nelle condizioni per poter approssimare il modello esatto costituito dalla distribuzione *binomiale* di parametri *incogniti* n e p con la distribuzione di *Poisson* di parametro *noto* $\lambda = 120$.

- **Calcoli**

La distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 120$ è definita da:

$$p(X = k) = e^{-120} \cdot \frac{120^k}{k!}$$

In particolare:

$$p(X = 110) = e^{-120} \cdot \frac{120^{110}}{110!} \simeq 0{,}025 = 2{,}5\%$$

Ragionando come nell'esempio precedente, si può capire perché la distribuzione di Poisson si rivela utile a descrivere, per esempio, i seguenti fenomeni, all'apparenza tanto diversi tra loro:

- il numero di incidenti che si verificano su un certo tratto autostradale in un dato giorno;
- il numero di errori di stampa che si trovano in una pagina di un libro;
- il numero di auto che passano da un certo casello autostradale tra le 17 e le 18 di un dato giorno;
- il numero di persone di una comunità che superano l'età di 100 anni.

ESEMPIO Arrivi di telefonate a un centralino/2

Nelle ipotesi dell'esempio precedente, supponiamo ora di volere calcolare la probabilità che nei primi cinque minuti di un'ora di punta arrivino al centralino più di 5 telefonate.

Per rispondere a questa domanda dobbiamo fare l'ulteriore ipotesi che la probabilità di arrivo delle telefonate sia *uniforme nel tempo*. In tale ipotesi è ragionevole supporre che nell'intervallo di tempo di 5 minuti (uguali a $\frac{5}{60}$ di ora) il numero medio di telefonate che giungono al centralino sia $\frac{5}{60} \cdot 120 = 10$.
Dunque il numero Y di telefonate effettivamente giunte al centralino nei primi cinque minuti di un'ora di punta si può modellizzare con una variabile aleatoria di Poisson di parametro 10. Pertanto:

$$p(Y > 5) = 1 - p(Y \leq 5) =$$

$$= 1 - e^{-10} \cdot \left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \frac{10^5}{5!} \right) \simeq 0{,}93$$

PER SAPERNE DI PIÙ **Il processo di Poisson**

In generale, le situazioni che si possono modellizzare tramite la distribuzione di Poisson sono quelle assimilabili al cosiddetto *processo di Poisson*, che ora descriviamo.
Consideriamo un esperimento in cui un dato fenomeno casuale (che chiameremo «arrivo») si manifesta ripetutamente in un intervallo di tempo $[0, t]$. Diciamo λ il numero medio di arrivi nell'unità di tempo e X_t la variabile aleatoria che conta il numero effettivo di arrivi nell'intervallo $[0, t]$ considerato. Se gli arrivi si verificano *senza sovrapposizioni* (ossia in modo che la probabilità che ci sia più di un arrivo in un intervallo di tempo infinitesimo è nulla), *con la stessa probabilità in ogni istante dell'intervallo e indipendentemente uno dall'altro*, si può dimostrare che X_t ha una distribuzione di Poisson di parametro λt. Quando si verifica una situazione di questo tipo si parla di **processo di Poisson di intensità** λ.

Prova tu **ESERCIZI** a p. 732

Supponi che il numero di errori tipografici di una pagina di un libro abbia una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = \frac{1}{5}$. Qual è la probabilità che in una data pagina ci siano due errori?

$\left[\frac{1}{50} e^{-\frac{1}{5}} \simeq 1{,}6\% \right]$

fino qui

4. Variabili aleatorie e distribuzioni continue

Nei paragrafi precedenti ci siamo soffermati sulle variabili aleatorie *discrete*; tuttavia il tempo e lo spazio sono continui, perciò esistono moltissimi fenomeni reali per la cui descrizione le variabili aleatorie discrete **non** sono adatte. Per esempio, è necessaria una variabile aleatoria **continua** (cioè una variabile aleatoria che può assumere tutti i valori reali di un dato intervallo) per descrivere il tempo di vita di un apparecchio soggetto a guasti casuali oppure il tempo di attesa di un automobilista a un semaforo. Anche la misura di grandezze fisiche quali la temperatura, la velocità ecc. è sempre soggetta a degli errori, quindi è da considerarsi una variabile aleatoria *continua*.
Inoltre, proprio a causa degli inevitabili errori di misura, non è utile chiedersi quanto vale la *probabilità* che la misura di una data grandezza assuma un valore prefissato, ma piuttosto qual è la probabilità che l'errore commesso non superi una certa soglia: si è interessati cioè a stabilire la *probabilità* che la misura della grandezza assuma valori in un determinato *intervallo*.

Rifletti

Dire, per esempio, che la misura di una lunghezza è 10 cm con un errore dell'1% significa dire che la misura reale di quella lunghezza appartiene all'intervallo [9,9 cm, 10,1 cm].