Una situazione analoga si presenta con variabili aleatorie continue di altro tipo: nel continuo l'interesse è di calcolare la probabilità non di eventi rappresentati da *singoli punti* bensì di eventi rappresentati da *intervalli*. Proprio per questo motivo una variabile aleatoria continua X è definita assegnando una *funzione* che permette di calcolare la probabilità che X assuma valori in un qualsivoglia *intervallo*.

DENSITÀ DI UNA VARIABILE ALEATORIA CONTINUA

Una variabile aleatoria continua X viene definita assegnando una funzione f, detta **densità (di probabilità)** di X, che soddisfa le seguenti proprietà:

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \qquad [11.3]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad [11.4]$$

La probabilità che X assuma valori in un dato intervallo I è data dall'integrale della sua densità sull'intervallo I considerato

$$p(X \in I) = \int_I f(x)\,dx \qquad [11.5]$$

Casi particolari			
$I = [a, b]$	$I = (-\infty, a]$	$I = [a, +\infty)$	$I = (-\infty, +\infty)$
$p(X \in I) =$ $= p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$	$p(X \in I) =$ $= p(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$	$p(X \in I) =$ $= p(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$	$p(X \in I) =$ $= p(-\infty < X < +\infty) =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Nell'ultimo caso particolare esaminato, in cui $I = (-\infty, +\infty)$, l'evento $X \in I$, ossia $-\infty < X < +\infty$, coincide chiaramente con l'*evento certo*, quindi la sua probabilità deve essere uguale a 1: di qui la necessità della condizione [11.4].

VISUALIZZIAMO I CONCETTI

Poiché la densità di probabilità f di una variabile aleatoria continua X è *non negativa* (condizione [11.3]):

a. l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ rappresenta l'*area* del sottografico della funzione densità (fig. 11.3): tale area è sempre uguale a 1 in base alla [11.4];

b. l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, che esprime la probabilità che risulti $a \leq X \leq b$, rappresenta l'*area* del sottografico della funzione densità nell'intervallo $[a, b]$ (fig. 11.4).

Modi di dire

Data una funzione $y = f(x)$, si dice sottografico della funzione nell'intervallo $[a, b]$ la parte di piano limitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$.

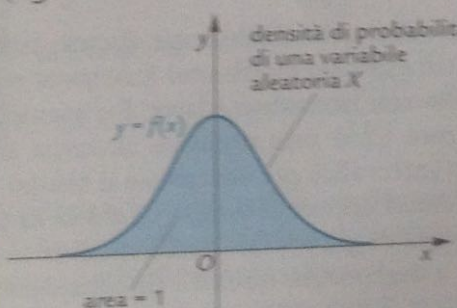


Figura 11.3

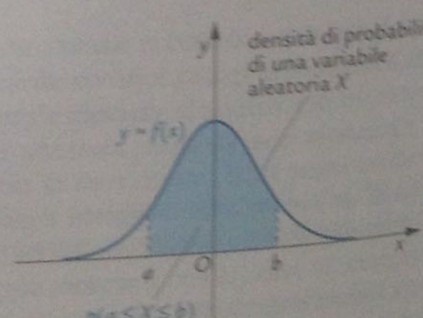


Figura 11.4

Nel caso di variabili aleatorie *continue*, la probabilità che X assuma valori in un dato intervallo può quindi essere interpretata come *area della regione di piano sottesa al grafico della densità nell'intervallo considerato.*

È importante fare alcune osservazioni.

a. Se l'intervallo $I = [a, b]$ si riduce a un punto, cioè se $a = b$, risulta:

$$p(X \in I) = p(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Perciò, se X è una variabile aleatoria *continua*, la probabilità che essa assuma un qualsivoglia valore reale prefissato è sempre *nulla*; in simboli:

$$p(X = a) = 0 \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{R}$$

Nel continuo, dunque, un evento di probabilità nulla **non** è necessariamente un evento impossibile. Conseguenza di questo fatto è che aggiungere o togliere un numero *finito* di punti a un intervallo non altera la sua probabilità; per esempio:

$$p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b)$$

b. Data la densità di probabilità f di una variabile aleatoria X, il valore $f(a)$ da essa assunto quando $x = a$ **non** ha (come invece accade nel caso discreto) il significato di probabilità dell'evento $X = a$: infatti questa probabilità è sempre uguale a zero, mentre il valore assunto da f in $x = a$, in generale, è un numero positivo. Solo l'*integrale* della densità su un intervallo ha il significato di *probabilità* di un evento.

Matematica e fisica

Il concetto di densità di probabilità è analogo al concetto di densità lineare (cioè di massa per unità di lunghezza di un filo rettilineo) che si incontra in fisica, precisamente in meccanica. La probabilità che una variabile aleatoria X assuma valori in un intervallo $[a, b]$ corrisponde, in questa analogia, alla massa del tratto di filo che ha lunghezza corrispondente a tale intervallo.

ESEMPIO Densità di probabilità

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$:

a. determiniamo per quale valore di k essa definisce la densità di una variabile aleatoria X;

b. in corrispondenza del valore di k trovato, determiniamo la probabilità che risulti $1 \leq X \leq 2$.

a. Affinché la funzione f definisca una densità di probabilità devono essere soddisfatte le due condizioni [11.3] e [11.4].

Affinché la funzione sia sempre non negativa (condizione [11.3]) deve essere $k \geq 0$; affinché sia soddisfatta anche la [11.4] deve essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad [11.6]$$

Poiché la funzione f è nulla al di fuori dell'intervallo $0 \leq x \leq 3$ la condizione [11.6] equivale alla seguente equazione, che risolviamo:

$$\int_0^3 kx^2\,dx = 1 \Rightarrow k\int_0^3 x^2\,dx = 1 \Rightarrow k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow 9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}$$

Questo valore di k è *accettabile* perché è *positivo*.

b. Per determinare la probabilità che sia $1 \leq X \leq 2$ basta integrare la densità sull'intervallo [1, 2]:

$$p(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{9}x^2}_{\text{densità di probabilità di } X}\,dx = \frac{1}{9}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$$

Media e varianza di una variabile aleatoria continua

Le definizioni di media e varianza di una variabile aleatoria *discreta* si estendono al caso *continuo* sostituendo semplicemente la sommatoria con l'integrale.

> **Matematica e fisica**
> La media di una variabile aleatoria continua X rappresenta il «centro» della distribuzione, così come in meccanica il baricentro di un filo pesante rappresenta il punto di equilibrio del filo stesso.

MEDIA DI UNA VARIABILE ALEATORIA CONTINUA

Data una variabile aleatoria continua X, di densità f, si dice **media (o valore medio o valore atteso o speranza matematica)** di X e si indica con il simbolo $E(X)$ (o con la lettera μ) il numero così definito:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \qquad [11.7]$$

VARIANZA E DEVIAZIONE STANDARD DI UNA VARIABILE ALEATORIA CONTINUA

Data una variabile aleatoria continua X, di densità f e media μ, si dice **varianza** di X e si indica con il simbolo $V(X)$ (o con σ^2) il numero così definito:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \qquad [11.8]$$

Si definisce **deviazione standard** di X (e si indica con σ) la radice quadrata della varianza:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Anche nel caso continuo, per il calcolo della varianza vale una formula «abbreviata» simile a quella vista nel caso discreto:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 \qquad [11.9]$$

ESEMPIO **Media e varianza di una variabile aleatoria continua**

Calcoliamo media e varianza della varabile aleatoria X di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In base alla [11.7]:

$$\mu = E(X) = \underbrace{\int_0^3 x \cdot \frac{1}{9}x^2\,dx}_{\text{la densità è nulla al di fuori dell'intervallo } [0,\,3], \text{ quindi sugli intervalli } (-\infty,\,0] \text{ e } [3,\,+\infty) \text{ anche l'integrale della densità è nullo}} = \int_0^3 \frac{1}{9}x^3\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\cdot\frac{81}{4} = \frac{9}{4}$$

Per calcolare la varianza, utilizziamo la formula «abbreviata» [11.9]:

$$V(X) = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{9}x^2\,dx - \mu^2 = \frac{1}{9}\int_0^3 x^4\,dx - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 - \frac{81}{16} =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{3^5}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}$$

> **Osserva**
> La funzione dell'esempio qui a fianco definisce effettivamente una densità di probabilità in base a quanto visto nell'esempio precedente.

Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA CONTINUA

Sia X una variabile aleatoria continua, avente come densità la funzione f; si chiama **funzione di ripartizione** di X la funzione che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è così definita:

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

> **Osserva**
> Il concetto di funzione di ripartizione di una variabile aleatoria si può definire anche nel caso di una variabile aleatoria *discreta* X, che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}$:
> $F(x) = p(X \le x) =$
> $= \sum_{x_i \le x} p(X = x_i)$

ESEMPIO **Funzione di ripartizione**

Sia X una variabile aleatoria continua di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La sua funzione di ripartizione è:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt & 0 \le x \le 1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt & x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Si può dimostrare che la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua:

- è crescente;
- tende a 0 per $x \to -\infty$;
- tende a 1 per $x \to +\infty$.

Inoltre, poiché la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua è la *funzione integrale* della sua densità, segue dalle proprietà della funzione integrale che:

- la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua è *sempre una funzione continua*;
- se la densità $f(x)$ di X è una funzione continua, la funzione di ripartizione $F(x)$ di X è derivabile e la sua derivata è la densità:

$$\underbrace{F'(x)}_{\text{la derivata della funzione di ripartizione di } X} \quad \underbrace{=}_{\text{è uguale}} \quad \underbrace{f(x)}_{\text{alla densità di } X}$$

Suggerimento

In molti problemi di probabilità è più facile determinare la *funzione di ripartizione* di una variabile aleatoria invece della sua *densità*. In questi casi si determina preliminarmente la funzione di ripartizione e poi si deduce, mediante derivazione, la funzione densità.

Prova tu **ESERCIZI** a p. 734

Considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e determina per quale valore di k essa è una densità di probabilità di una variabile aleatoria X. In corrispondenza del valore di k trovato determina:

a. la probabilità che sia $X > 1$;

b. la media e la varianza di X.

$\left[k = \frac{1}{2}; \text{a. } \frac{3}{4}; \text{b. } \mu = \frac{4}{3}, \sigma^2 = \frac{2}{9}\right]$

5. Distribuzioni uniforme, esponenziale e normale

Presentiamo in questo paragrafo le principali densità di probabilità continue.

La distribuzione uniforme

DENSITÀ UNIFORME

Una variabile aleatoria continua si dice avere **distribuzione uniforme** sull'intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, se la sua densità è la funzione (fig. 11.5):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per indicare che una variabile aleatoria X è uniforme sull'intervallo $[a, b]$ si utilizza la scrittura $X \sim U(a, b)$.

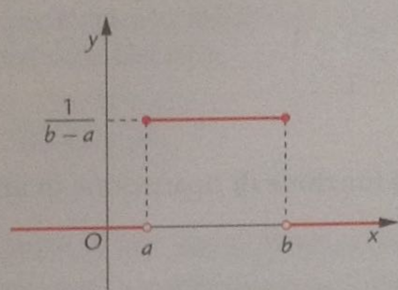


Figura 11.5

TEOREMA 11.4 **Media e varianza di una variabile aleatoria uniforme**

La **media** e la **varianza** di una variabile aleatoria X **uniforme** sull'intervallo $[a, b]$ sono espresse dalle formule:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Prova tu

Puoi dimostrare la validità delle formule qui a fianco verificando che:

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Il modello uniforme si applica a tutti quei fenomeni casuali che si possono assimilare alla scelta di un numero a caso in un intervallo (o equivalentemente alla scelta di un punto a caso su un segmento).

ESEMPIO **Tempo di attesa di un bus**

Una linea di bus prevede una data fermata la prima volta alle 7.15 del mattino e successivamente ogni quindici minuti. Paolo tutti i giorni si presenta a quella fermata in un istante a caso tra le 7 e le 7.30 e prende il primo bus che passa. Qual è la probabilità che debba attendere più di cinque minuti?

Poiché l'arrivo di Paolo tra le 7 e le 7.30 alla fermata del bus è del tutto casuale, possiamo assimilare l'ora di arrivo di Paolo alla scelta a caso di un numero nell'intervallo $[0, 30]$. Indichiamo con X la variabile aleatoria che rappresenta tale numero scelto a caso. Allora X è una variabile aleatoria *uniforme* sull'intervallo $[0, 30]$. L'evento E: «Paolo deve attendere più di cinque minuti» si realizza se e solo se Paolo arriva tra le 7 e le 7.10 oppure se arriva tra le 7.15 e le 7.25. Dunque:

$$p(E) = p(0 < X < 10) + p(15 < X < 25) =$$
$$= \int_0^{10} \frac{1}{30}\,dx + \int_{15}^{25} \frac{1}{30}\,dx = \frac{1}{30}(10-0) + \frac{1}{30}(25-15) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

La distribuzione esponenziale

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Una variabile aleatoria continua si dice avere **distribuzione esponenziale** di parametro reale λ, con $\lambda > 0$, se la sua densità è la funzione (fig. 11.6):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

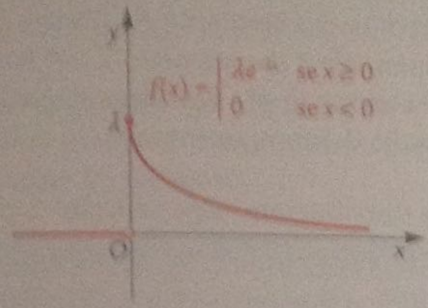


Figura 11.6

Per indicare che una variabile aleatoria X è esponenziale di parametro λ si utilizza la scrittura $X \sim E(\lambda)$.

Media e varianza di una variabile aleatoria esponenziale — **TEOREMA 11.5**

La media e la **varianza** di una variabile aleatoria X **esponenziale** di parametro λ sono espresse dalle formule:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Prova tu

Puoi verificare la validità delle formule del teorema 11.5 verificando che:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\, dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Le variabili aleatorie esponenziali sono utilizzate come modelli per descrivere il *tempo di attesa* di un accadimento; in particolare giocano un ruolo importante nella descrizione del *tempo di vita* (cioè del tempo di attesa prima che si verifichi un guasto) di *componenti elettronici*; per capire il motivo di ciò, dobbiamo mettere in evidenza un'importante proprietà della distribuzione esponenziale, cui ci avviciniamo ragionando inizialmente su un esempio.

Consideriamo una variabile aleatoria X, che rappresenti il tempo di attesa prima che si verifichi il primo guasto di un apparecchio. *Sapendo* che è già trascorso un tempo t senza che si sia verificato alcun guasto (cioè che $X > t$), qual è la probabilità che trascorra ulteriormente un tempo h prima che si verifichi un guasto (cioè che $X > t + h$)? Si dimostra che questa probabilità *condizionata* (cioè la probabilità dell'evento $X > t + h | X > t$) è *indipendente* da t se la variabile X ha distribuzione esponenziale: precisamente, è uguale alla probabilità dell'evento $X > h$ (cioè è uguale alla probabilità che si aveva inizialmente di dovere attendere più di h). Questa proprietà può essere interpretata come se in ogni istante una variabile aleatoria esponenziale azzerasse la propria «memoria del passato». È questo il motivo per cui si parla di «assenza di memoria» della distribuzione esponenziale.

ASSENZA DI MEMORIA DELLE VARIABILI ALEATORIE ESPONENZIALI

Se X è una variabile aleatoria esponenziale, vale la seguente proprietà:

$$p(X > t + h | X > t) = p(X > h) \qquad \text{per ogni } t > 0, h > 0 \qquad [11.10]$$

L'assenza di memoria si può interpretare, in termini di tempo di vita di un'apparecchiatura, come *mancanza di usura*; infatti la [11.10] esprime quanto espresso nei commenti in rosso:

$$\underbrace{p(X > t + h | X > t)}_{\substack{\text{la probabilità che il tempo di vita} \\ \text{di una apparecchiatura vecchia,} \\ \text{di età } t\text{, sia superiore ad } h}} \quad \underbrace{=}_{\text{è uguale}} \quad \underbrace{p(X > h)}_{\substack{\text{alla probabilità che il tempo di vita} \\ \text{di un apparecchio nuovo} \\ \text{sia superiore ad } h}}$$

La distribuzione normale

DISTRIBUZIONE NORMALE

Una variabile aleatoria continua si dice avere **distribuzione normale** (o **gaussiana**) di parametri μ e σ^2, con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, se la sua densità di probabilità è la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dalla storia

La distribuzione gaussiana è in realtà stata scoperta nel 1733 dal matematico **Abraham De Moivre** (1667-1754) e successivamente utilizzata nel 1797 da Gauss (1777-1855) nell'ambito della teoria degli errori.

Per indicare che una variabile aleatoria X è normale di parametri μ e σ^2 si scrive: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Il fatto che i parametri siano indicati con le lettere μ e σ^2 non è casuale, infatti sussiste il teorema seguente.

Media e varianza di una variabile aleatoria normale — **TEOREMA 11.6**

La **media** e la **varianza** di una variabile aleatoria X **normale** di parametri μ e σ^2 sono espresse dalle formule:

$$E(X) = \mu \qquad \text{e} \qquad V(X) = \sigma^2$$

Il grafico della densità di probabilità di una variabile aleatoria normale, rappresentato in fig. 11.7, ha le seguenti caratteristiche:

- è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \mu$;
- presenta un massimo nel punto $x = \mu$;
- presenta due punti di flesso in $x = \mu \pm \sigma$.

Una variabile aleatoria normale avente media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$ è detta **normale standard**; la sua densità è rappresentata in fig. 11.8:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad [11.11]$$

In simboli

Una variabile aleatoria **normale standard** viene di solito indicata con la lettera Z:

$Z \sim N(0,1)$

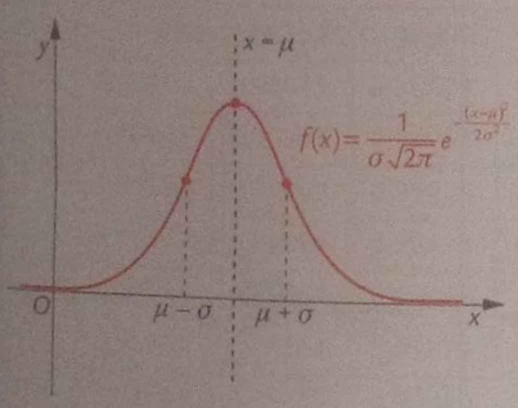


Figura 11.7

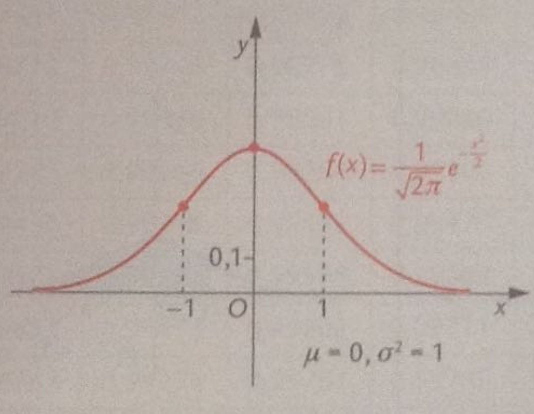


Figura 11.8

Figure dinamiche

Puoi visualizzare come varia la densità di una variabile aleatoria normale al variare dei suoi parametri tramite le figure dinamiche disponibili on-line.

Nel proseguimento del paragrafo vedremo:

1. come calcolare le probabilità di una variabile aleatoria *normale standard*;
2. come calcolare le probabilità di una variabile aleatoria normale di parametri *qualsiasi*, utilizzando le probabilità della *normale standard*;
3. a quali fenomeni si applica il modello normale.

1. Il calcolo delle probabilità di una normale standard

Il calcolo delle probabilità di una variabile aleatoria Z normale standard (ossia di densità [11.11]) si basa sulla **funzione di ripartizione** della normale standard, convenzionalmente denotata con la lettera Φ:

$$\Phi(z) = p(Z \le z) = p(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \qquad [11.12]$$

Ricorda

Nel continuo risulta $p(Z = z) = 0$ perciò $p(Z \le z) = p(Z < z)$

I valori assunti dalla funzione [11.12] si possono ottenere (data la complessità dei calcoli necessari a ricavarli) tramite le funzioni predefinite messe a disposizione dai fogli elettronici e dai software di calcolo, oppure facendo riferimento alla tab. 11.1, che ne riporta i valori per $z \geq 0$. I valori per $z < 0$ si possono ricavare in base alle proprietà di simmetria della densità normale standard, come messo in evidenza nei prossimi esempi.

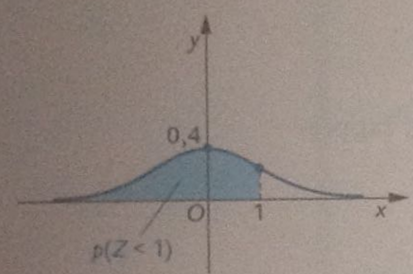
ESEMPIO **Come calcolare le probabilità della normale standard**

Sia Z una variabile aleatoria normale standard. Calcoliamo:

a. $p(Z < 1)$ **b.** $p(0 < Z < 1{,}5)$ **c.** $p(Z > 0{,}75)$ **d.** $p(Z < -0{,}75)$ **e.** $p(Z > -1)$ **f.** $p(-1{,}75 < Z < -0{,}5)$

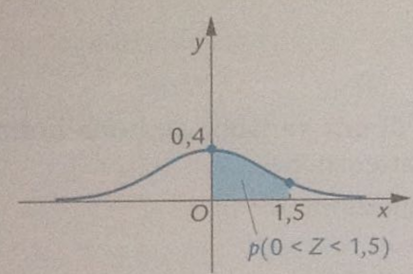
Impostiamo il lavoro nelle seguenti tabelle.

a. $p(Z < 1)$



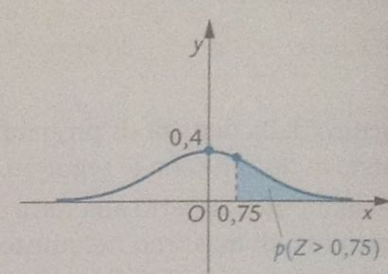
$p(Z < 1) =$
$= \Phi(1) = 0{,}84134$ — Tavole

b. $p(0 < Z < 1{,}5)$



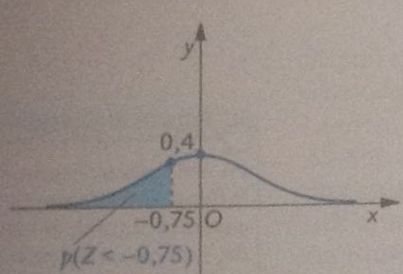
$p(0 < Z < 1{,}5) =$
$= p(Z < 1{,}5) - p(Z \leq 0) =$
$= \Phi(1{,}5) - \Phi(0) =$ — Tavole
$= 0{,}93319 - 0{,}5 =$
$= 0{,}43319$

c. $p(Z > 0{,}75)$



$p(Z > 0{,}75) =$
$= 1 - p(Z \leq 0{,}75) =$ — Passaggio al complementare
$= 1 - \Phi(0{,}75) =$
$= 1 - 0{,}77337 = 0{,}22663$ — Tavole

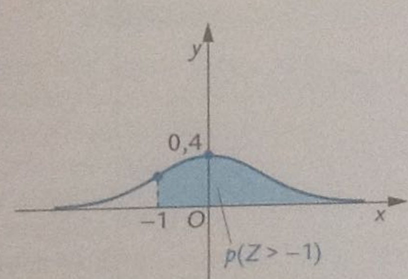
d. $p(Z < -0{,}75)$



Utilizziamo la simmetria rispetto all'asse y della densità normale standard:

$p(Z < -0{,}75) =$ — Simmetria
$= p(Z > 0{,}75) =$ — Vedi punto c.
$= 1 - p(Z \leq 0{,}75) =$
$= 1 - \Phi(0{,}75) = 0{,}22663$

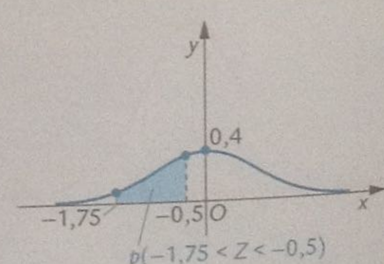
e. $p(Z > -1)$



Utilizziamo la simmetria rispetto all'asse y della densità normale standard:

$p(Z > -1) =$ — Simmetria
$= p(Z < 1) =$
$= \Phi(1) = 0{,}84134$ — Tavole

f. $p(-1{,}75 < Z < -0{,}5)$



Utilizziamo la simmetria rispetto all'asse y della densità normale standard:

$p(-1{,}75 < Z < -0{,}5) =$ — Simmetria
$= p(0{,}5 < Z < 1{,}75) =$
$= p(Z < 1{,}75) - p(Z \leq 0{,}5) =$
$= \Phi(1{,}75) - \Phi(0{,}5) =$
$= 0{,}95994 - 0{,}69146 = 0{,}26848$

In particolare, ragionando come nel punto **d.**, si può dedurre che in generale vale la relazione:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z > 0 \qquad [11.13]$$

Un ulteriore fatto notevole è che l'assenza di memoria *caratterizza* la distribuzione esponenziale, nel senso che è l'*unica* distribuzione continua che soddisfa questa proprietà. Si può quindi comprendere l'importanza delle variabili aleatorie esponenziali ai fini della modellizzazione: sono l'*unico* modello adeguato a descrivere il tempo di vita di componenti (come i transistor) che non si usurano nel tempo e il cui guasto è da attribuirsi a eventi puramente accidentali.

ESEMPIO Tempo di vita di un componente elettronico

Il tempo di vita (in ore) di un componente elettronico è ben interpretato da una variabile aleatoria esponenziale X di parametro $\lambda = 0{,}0005$. Determiniamo:

a. la probabilità che il tempo di vita del componente sia inferiore alle 1000 ore;

b. il tempo di vita medio del componente.

a. Poiché X segue una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 0{,}0005$, la sua densità sarà la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}0005e^{-0{,}0005x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Dunque la probabilità richiesta è uguale a:

$$p(X < 1000) = \int_{-\infty}^{1000} f(x)\,dx = \int_{0}^{1000} 0{,}0005e^{-0{,}0005x}\,dx = [-e^{-0{,}0005x}]_0^{1000} =$$

la densità è nulla sull'intervallo $(-\infty, 0)$ quindi anche l'integrale della densità su questo intervallo è nullo

$$= -e^{-0{,}5} + 1 \simeq 0{,}3935 = 39{,}35\%$$

b. Il tempo di vita medio del componente è uguale alla media di X, che è uguale a:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}0005} = 2000$$

quindi la durata di vita media del componente è 2000 ore.

PER SAPERNE DI PIÙ Legami tra distribuzione esponenziale e distribuzione di Poisson

Si può giungere alla distribuzione *esponenziale* anche tramite una particolare variabile aleatoria legata al *processo di Poisson*. Consideriamo la variabile aleatoria X_t che conta il numero di arrivi di un fenomeno casuale che si verificano nell'intervallo di tempo $[0, t]$. Assumiamo che, per ogni intervallo di tempo considerato (ossia per ogni $t \geq 0$), X_t sia una variabile aleatoria di Poisson di parametro λt, essendo λ il numero medio di arrivi nell'unità di tempo.

Consideriamo la variabile aleatoria Y: «istante in cui avviene il primo arrivo». L'evento $Y > t$: «il primo arrivo avviene dopo l'istante t» coincide con l'evento $X_t = 0$, vale a dire «il numero di arrivi nell'intervallo $[0, t]$». Pertanto:

$$F_Y(t) = p(Y > t) = p(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

Ne segue che, per $t \geq 0$, la funzione di ripartizione di Y è così definita:

$$F_Y(t) = p(Y \leq t) = 1 - p(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

mentre per $t < 0$ è ovviamente $F_Y(t) = p(Y \leq t) = 0$. La densità di Y è la *derivata* della funzione di ripartizione, quindi:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

La distribuzione *esponenziale* è dunque la distribuzione *dell'istante del primo arrivo* in un processo di Poisson. Questa osservazione getta ulteriore luce sul motivo per cui le variabili aleatorie esponenziali sono spesso i modelli adeguati a descrivere il *tempo di attesa* di un accadimento.