INTEGRALE IMPROPRIO

$y=f(x)$ una funzione continua in $I=[a,b[$ e b': $a<b'<b$

$$F(b')=\int_a^{b'} f(x)\,dx$$

Se esiste il limite $\lim_{b'\to b^-} F(b') = \lim_{b'\to b^-} \int_a^{b'} f(x)\,dx$

si dice che $y=f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx}$$ INTEGRALE IMPROPRIO

ESEMPIO

Sia $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ calcolare $\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

$$-\int_0^b (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x)$$

La funzione è continua in $[0,1[$

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^b = -2\sqrt{1-b}+2$$

$$-2\sqrt{1-b}-(-2\sqrt{1-0})$$

$$\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{b\to 1^-}\left[-2\sqrt{1-b}+2\right] = 2$$

Analogamente se $y=f(x)$ è continua in $I\ ]a;b]$ e a': $a<a'<b$

$$F(a')=\int_{a'}^{b} f(x)\,dx$$

Se esiste il limite $\lim_{a'\to a^+} F(a') = \lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^{b} f(x)\,dx$

si dice che $y=f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^{b} f(x)\,dx}$$ INTEGRALE IMPROPRIO

In generale data una funzione continua nell'intervallo illimitato superiormente $I=[a;+\infty)$ $[I'=(-\infty;b]]$

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \left[F(a)=\int_a^b f(x)dx\right]$$

1) Se esiste il limite

$$\lim_{b\to+\infty} F(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

allora

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx}$$

INTEGRALE IMPROPRIO

2) Se esiste il limite

$$\lim_{a\to-\infty} F(a)=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

allora

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx}$$

INTEGRALE IMPROPRIO