METTITI ALLA PROVA

Limiti e continuità

1 Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq c \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^+$.

a. Ricava i valori di a, b e c in modo tale che:
- $f(x)$ sia continua in $x = 0$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2e$;
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$.

[$a = 1$; $b = 0$; $c = 3$]

b. Posto che a, b e c siano i valori trovati al punto precedente, calcola: $\lim_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [$+\infty$; 0]

c. Stabilisci se esistono i seguenti limiti e, nel caso, calcolali: $\lim_{x\to-\infty} xf(x)$; $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$. [non esiste; $-\infty$]

2 Considera la funzione f di variabile reale definita, per $x \neq c$, da $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$, con a, b, c parametri reali, a positivo.

a. Determina a, b, c affinché il grafico di f:
- abbia un asintoto verticale di equazione $x = 2$;
- passi per il punto $A(1; 0)$;
- abbia un asintoto obliquo passante per il punto $B(0; 3)$.

b. Disegna il grafico di f.

c. A partire dal grafico di f disegna il grafico della funzione g definita da $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ mettendo in evidenza intersezioni con gli assi e asintoti.

[a) $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$]

3 Calcola $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

Sfruttando anche il risultato ottenuto, studia i punti di discontinuità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \log_{\sqrt{2}} e & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{12}{x+1} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Stabilisci se ci sono punti di discontinuità di terza specie e in tal caso indica come può essere eliminata la discontinuità modificando la definizione della funzione. [$x = 0$ disc. III specie; $x = 3$ disc. I specie]

4 REALTÀ E MODELLI **Una nuova vettura** Una casa automobilistica ha progettato una vettura in cui il costo per il consumo di carburante, espresso in euro, dipende dai kilometri percorsi x secondo la funzione:

Rawpixel.com/Shutterstock

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq 3 \\ \frac{bx^2 + cx + 1}{10x - 20} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

con a, b, c parametri reali.

Durante la presentazione della vettura viene dichiarato che, all'aumentare dei kilometri percorsi, il costo per il consumo di carburante tende a diventare € 1 ogni 10 km. Determina:

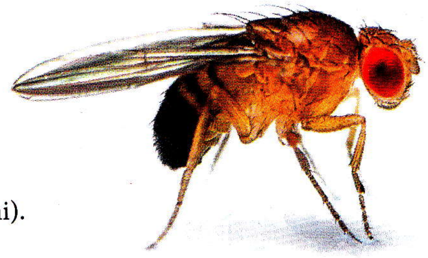
a. i parametri b e c;

b. il parametro a affinché la funzione sia continua in $x = 3$;

c. il numero minimo di kilometri da percorrere per avere una differenza di costi tra i valori reali e quelli dichiarati inferiore al decimillesimo di euro.

[a) $b = 1$, $c = -2$; b) $a = \frac{2}{5}$; c) 1003]

5 REALTÀ E MODELLI **Il moscerino della frutta** Un modello che rappresenta l'evoluzione della popolazione del moscerino della frutta ha equazione:



Robian/Shutterstock

$$N(t) = \frac{200}{3e^{-\frac{2}{5}t} + 2},$$

dove $N(t)$ è il numero di moscerini e t è il tempo (misurato in giorni).

a. Quanti sono i moscerini all'inizio dell'osservazione? In quanto tempo la popolazione diventa di 50 individui?

b. Disegna il grafico di $N(t)$ e osserva che ammette un asintoto orizzontale. Che significato assume per la popolazione di moscerini questa retta? Verifica tale risultato attraverso la definizione di limite.

[a) 40, $t \simeq 1$ giorno; b) $N = 100$]

---

6 Considera la funzione:

$$a(x) = 200\left(1 - e^{-\frac{(x-3)^2}{300-100x}}\right).$$

a. Per quale valore di x la funzione si annulla?

b. Quanto vale $a(0)$?

c. Per quale x la funzione assume un valore pari al 75% di $a(0)$?

[a) $\nexists\, x \in D$; b) $a(0) \simeq 5{,}9$; c) $x \simeq 0{,}76$]

7 Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}\right)$ [0]

[Liceo scientifico opzione internazionale italo-inglese 2015 - Sessione ordinaria - Quesito 5]

8 Verificare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie («a salto»), mentre la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie («eliminabile»).

[Corso di ordinamento 2015 - Sessione straordinaria - Quesito 2]

9 Un triangolo ha i lati che misurano rispettivamente $3a$, $4a$ e $5a$. Sia A l'area del triangolo stesso, A_1 l'area del cerchio inscritto e A_2 quella del cerchio circoscritto. Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{a \to +\infty} \frac{A_1}{A}$; **b.** $\lim_{a \to +\infty} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$.

$\left[\text{a) } \frac{\pi}{6}; \text{ b) } \frac{5}{2}\right]$

10 Considera la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ a & \text{se } x = 2 \end{cases},$$

con a parametro reale.

a. Determina a affinché l'immagine mediante f dell'intervallo $I = [-1; 3]$ sia un intervallo chiuso.

b. Determina gli estremi dell'immagine $f(I)$ di I.

[a) 5; b) 2, 10]

11 Esplicita, rispetto alla variabile y, l'equazione della curva $x^2 - xy - 3x - y + 2 = 0$. Stabilisci se la curva presenta degli asintoti e, in caso di risposta affermativa, determinane le equazioni. Individua il punto di intersezione C degli asintoti e verifica che è centro di simmetria per la curva, scrivendo le equazioni della simmetria centrale rispetto al punto C. [$x = -1$, $y = x - 4$; $C(-1; -5)$]

Derivate

12 Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 0 \\ \sin x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \\ c & \text{se } x > \frac{3}{2}\pi \end{cases}$, dove a, b e c sono parametri reali.

a. Determina i parametri a, b, c in modo che la funzione sia derivabile per ogni x reale. Disegna il grafico di f.

b. La funzione f' è continua? Disegna il suo grafico. La funzione f' è derivabile?

[a) $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$]