TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Date $y=f(x)$ e $y=g(x)$ due funzioni definite in un intervallo I e sia $c \in I$.

Se:
- $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono derivabili in $I-\{c\}$, $g'(x)\neq 0$,
- le due funzioni tendono a 0 (oppure a ∞) per $x \to c$
- $\exists \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Dim

Dimostriamo il teorema nel caso in cui $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$.

$y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono derivabili in $I-\{c\}$ e sono anche continue in $I-\{c\}$. Allora possiamo assumere $f(c)=g(c)=0$ e $y=f(x)$ e $y=g(x)$ continue in tutto I.

Le funzioni $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ e $y=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ sono definite in $I-\{c\}$.

Il teorema di Rolle garantisce che anche $g'(x)\neq 0$ $\forall x \in I-\{c\}$.

Per il teorema di Cauchy $\forall x \in I$ con $x \neq c$ $\exists x_\alpha \in I_{(x;c)}$ tale che
$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(x_\alpha)}{g'(x_\alpha)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_\alpha)}{g'(x_\alpha)}$$

Allora $\exists \lim_{x\to c}\frac{f'(x_\alpha)}{g'(x_\alpha)}$ e si ha:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x_\alpha)}{g'(x_\alpha)} = \lim_{x_\alpha\to c}\frac{f'(x_\alpha)}{g'(x_\alpha)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

OSS

Il teorema di De L'Hôpital può essere applicato a tutte le forme indeterminate

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty;\ 0^0;\ 1^\infty;\ \infty^0$$

ESEMPIO

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x)}{1} = \lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg} x) = 0$$

- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}^{f(x)}}{\underbrace{\ln(x-1)}_{g(x)}} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$ (applico de L'Hôpital)

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{2}{(x-1)^3}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2}{(x-1)^2} = -\infty$$

LIMITI NOTEVOLI

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha > 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \alpha > 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^\alpha \cdot \ln x) = 0 \qquad \alpha > 0$

DIM

1) $\alpha > 0$; $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

2) $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\alpha x^{\alpha - 1}} =$

$=$
- $\alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha - 1 \leq 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\alpha x^{\alpha - 1}} = +\infty$
- $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\alpha x^{\alpha - 1}} = +\infty$

3) $\alpha > 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} (x^\alpha \ln x) = [0 \cdot (-\infty)]$

poniamo $t = \dfrac{1}{x} \qquad x \to 0^+ \; t \to +\infty$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{t}}{t^\alpha} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln 1 - \ln t}{t^\alpha} =$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} - \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$