LA CONTINUITÀ E LA DERIVABILITÀ

Teorema

Se una funzione $y=f(x)$ è derivabile in $x=x_0$ con $x_0 \in D_f$, allora $y=f(x)$ è continua in $x=x_0$. Non è vero il viceversa (controesempio: $f(x)=|x|$)

Dim: Per ipotesi sappiamo che $y=f(x)$ è derivabile in $x=x_0$ quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Quindi $f(x_0+h) = f(x_0) + h \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

passando al limite per $h\to 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left[f(x_0) + h \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \underbrace{\lim_{h\to 0} f(x_0)}_{f(x_0)} + \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{h\to 0 \; f'(x_0)} \cdot h =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

Allora abbiamo dimostrato che

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \text{ovvero}$$

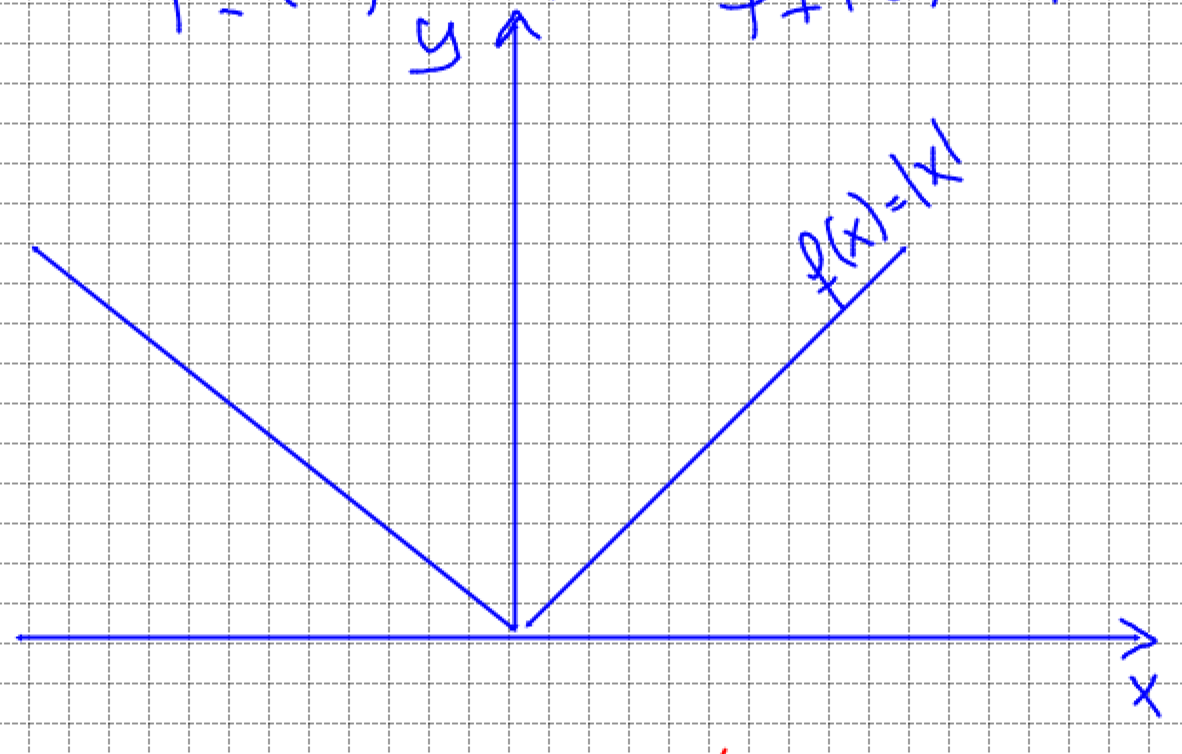
$y=f(x)$ è continua in $x=x_0$.

(se poniamo $x_0+h=x$ quindi per $h\to 0 \Rightarrow x\to x_0$ si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

DERIVABILITÀ $\Longrightarrow$ CONTINUITÀ

$f(x)=|x|$ funzione continua in $x=0$ ma non derivabile in $x=0$ infatti

$f'_-(0) = -1 \qquad f'_+(0) = 1$



CONTINUITÀ $\not\Longrightarrow$ DERIVABILITÀ.