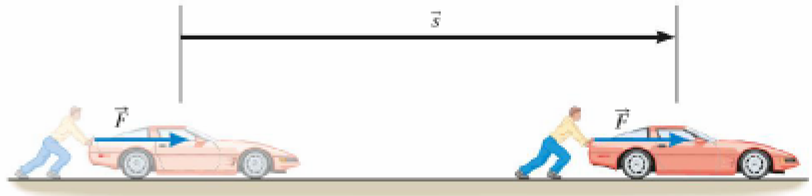
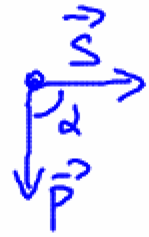
Il lavoro compiuto da una forza costante





Il disegno mostra una forza costante $\vec{F}$ che ha la stessa direzione e lo stesso verso dello spostamento $\vec{s}$. In questo caso il lavoro L è definito come prodotto del modulo F della forza per il modulo s dello spostamento:

$$L = Fs$$

$$L = F \cdot S \cdot \cos\alpha = 0$$

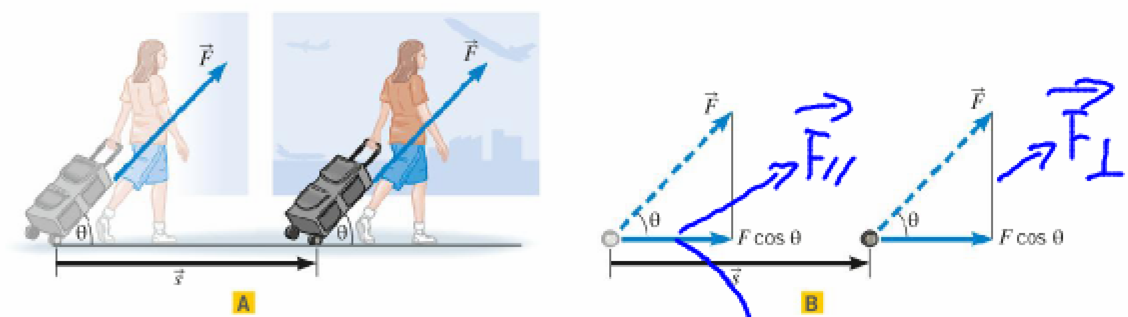
Il lavoro compiuto non dipende dalla direzione in cui è spinta l'automobile: quindi il lavoro è una grandezza scalare. Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del lavoro è il **joule** (J) in onore del fisico inglese James Joule (1818-1889):

$$1\ \text{J} = (1\ \text{N})(1\ \text{m})$$

Se lo spostamento è nullo, il lavoro è nullo, anche se si esercita una forza. Per esempio, se spingi un oggetto che non si sposta, come per esempio un muro, i tuoi muscoli si stancano ma la forza che eserciti non compie lavoro. In fisica il concetto di lavoro è strettamente collegato a quello di moto: se un oggetto non si muove, le forze applicate all'oggetto non compiono alcun lavoro.

Forza che forma un angolo con lo spostamento

In generale, la forza applicata e lo spostamento non hanno la stessa direzione.



$$L = F \cdot s \cdot \cos\theta = s \cdot \underbrace{F \cos\theta}_{F_{//}} = s \cdot F_{//}$$

La direzione della forza e quella dello spostamento formano un angolo θ. In questo caso, nella definizione di lavoro si considera solo la componente della forza nella direzione dello spostamento, cioè, come mostra la figura **2B**, $F_{\parallel} = F\cos\theta$.

DEFINIZIONE DI LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA COSTANTE

Il lavoro compiuto su un oggetto da una **forza costante** $\vec{F}$ è

$$L = F_{\parallel}\, s = (F\cos\theta)\, s \tag{1}$$

dove F è il modulo della forza, $F_{\parallel} = F\cos\theta$ è la componente della forza parallela allo spostamento, s è il modulo dello spostamento e θ è l'angolo tra la direzione della forza e quella dello spostamento.

Unità di misura: newton · metro = joule (J).

Quando la forza e lo spostamento hanno la stessa direzione si ha $\theta = 0°$ e $F_{\parallel} = F$, e l'equazione (1) diventa $L = Fs$.

La definizione di lavoro data dall'equazione (1) tiene conto solo della componente della forza nella direzione dello spostamento: la componente della forza perpendicolare allo spostamento non compie alcun lavoro. In particolare, se la forza $\vec{F}$ è perpendicolare allo spostamento, la sua componente $F_{\parallel}$ parallela allo spostamento è nulla e quindi la forza non compie alcun lavoro (figura **3**).

Lavoro negativo

Una forza $\vec{F}$ oppone resistenza al moto di un oggetto quando forma con lo spostamento un angolo maggiore di 90°, come nel caso raffigurato in figura **4**. In questo caso

$$L = (F\cos\theta)\, s$$

è negativo perché $\cos\theta < 0$: il segno negativo del lavoro sottolinea il fatto che si tratta di lavoro **resistente**.

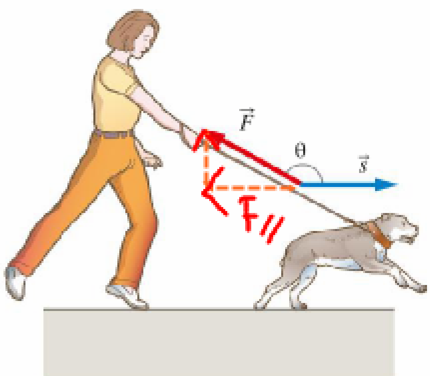


Figura 4
La ragazza cerca di rallentare il cane, esercitando una forza che forma un angolo maggiore di 90° con lo spostamento del cane.

Lavoro e prodotto scalare

Ricordando che $(F\cos\theta)s = Fs\cos\theta$ è il prodotto scalare $\vec{F}\cdot\vec{s}$ dei vettori $\vec{F}$ e $\vec{s}$. Quindi si può dare la seguente definizione di lavoro compiuto su un oggetto da una forza costante $\vec{F}$:

$$L = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

dove $\vec{s}$ è lo spostamento effettuato dall'oggetto mentre la forza $\vec{F}$ agisce su di esso.

L'energia cinetica

Quando una forza totale compie su un oggetto un lavoro positivo, l'oggetto aumenta la sua velocità e quindi la sua **energia cinetica**.

DEFINIZIONE DI ENERGIA CINETICA

L'**energia cinetica** K di un oggetto di massa m che si muove con velocità v è data da

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

Unità di misura: joule (J).

L'unità di misura SI dell'energia cinetica è la stessa del lavoro, cioè il **joule**. Infatti

$$(1\ \text{kg})(1\ \text{m/s})^2 = 1\ (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)(1\ \text{m}) = (1\ \text{N})(1\ \text{m}) = 1\ \text{J}$$

$$1\,\text{Kg}\cdot\frac{1\,\text{m}\cdot 1\,\text{m}}{1\,\text{s}^2} = 1\,\text{N}\cdot 1\,\text{m} = 1\,\text{J}$$

Come il lavoro, anche l'energia cinetica è una grandezza scalare. Esiste però un'importante differenza: contrariamente al lavoro, l'energia cinetica di un oggetto non può essere negativa.

Teorema dell'energia cinetica

Il legame fra lavoro ed energia cinetica è espresso dal seguente teorema:

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

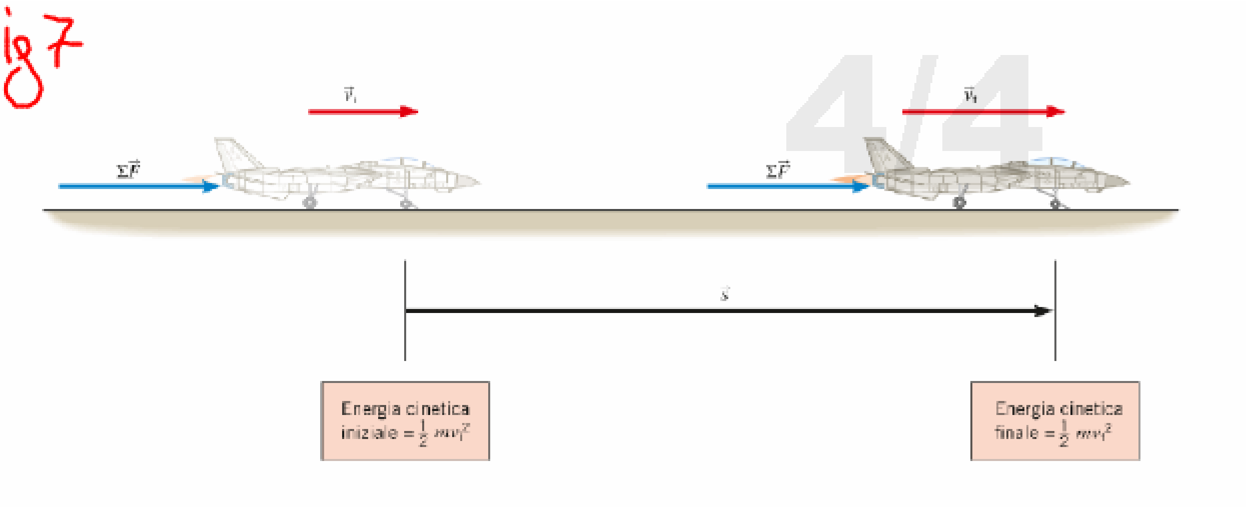
Il lavoro compiuto dalla forza risultante su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo:

$$L = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{3}$$

Deriviamo questo risultato nel caso particolare di una forza costante che agisce nello stesso verso dello spostamento. La figura 7 mostra la forza totale $\sum\vec{F}$ che agisce su un aereo di massa m durante il decollo. Per il secondo principio della dinamica l'aereo si muove con una accelerazione a tale che

$$\sum F = ma$$

Fig 7



Di conseguenza la velocità dell'aereo cambia dal valore iniziale v_i al valore finale v_f. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per lo spostamento s si ottiene:

$$\overbrace{\left(\sum F\right)s}^{L} = ma\,s$$

Il prodotto $(\sum F)s$ è il lavoro L compiuto dalla risultante delle forze esterne che agiscono sull'aereo. Il prodotto as che compare nel secondo membro può essere espresso mediante le velocità v_i e v_f usando l'equazione:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2s}$ $\quad as = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2)$

da cui si ricava:

$$as = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2)$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene la (3):

$$L = m\frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}\,mv_f^2 - \frac{1}{2}\,mv_i^2$$

Anche se lo abbiamo dimostrato in un caso particolare, il teorema dell'energia cinetica è valido in generale, qualunque sia la forza e la sua direzione rispetto allo spostamento del corpo su cui agisce.

Secondo questo teorema, qualunque oggetto in movimento ha un'energia cinetica perché è stato necessario compiere un lavoro su di esso per far cambiare la sua velocità dal valore iniziale v_i al valore finale v_f. Leggendo l'equazione (3) da destra verso sinistra, il teorema dell'energia cinetica afferma anche il contrario, cioè che qualunque oggetto dotato di energia cinetica può compiere un lavoro, purché sia lasciato libero di agire su un altro oggetto.