

PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Def: Una successione numerica si dice PROGRESSIONE GEOMETRICA quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante; Tale rapporto si chiama RAGIONE.

OSS: Se a_n è l' n -esimo termine di una progressione geometrica di ragione q :

$$a_n = q a_{n-1}$$

- se $q > 0$ i termini sono tutti positivi o tutti negativi
- se $q < 0$ i termini sono a segno alterno.

ESEMPIO

1) $a_1 = 6$ $q = 2$
 $a_2 = 12$ $a_3 = 24$ $a_4 = 48$

2) $a_1 = -6$ $q = 2$
 $a_2 = -12$ $a_3 = -24$ $a_4 = -48$

3) $a_1 = -6$ $q = -2$
 $a_2 = a_1 q = 12$ $a_3 = a_2 q = -24$ $a_4 = a_3 q = 48$

Teorema

In una progressione geometrica il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la potenza della ragione q con esponente $(n-1)$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} \quad n > 0$$

Teorema:

Nei primi n termini di una progressione geometrica il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed è uguale al prodotto dei termini estremi.

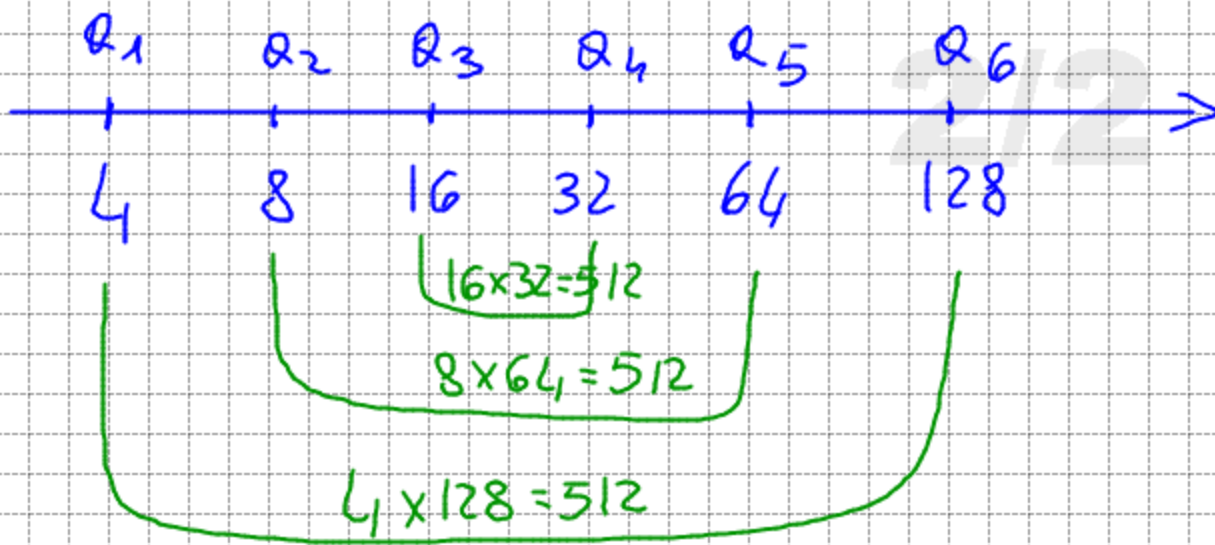
Dim:

Siano a_1 ed a_n gli estremi di una progressione geometrica e q la ragione; siano x ed y due termini equidistanti da a_1 e a_n .

$$x = a_1 q^c \quad y = a_n q^{-c}$$

$$xy = (a_1 q^c)(a_n q^{-c}) = a_1 a_n$$

ESEMPIO



Teorema

La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ è:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dim

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

sostituisco $a_n = a_1 q^{n-1}$:

$$(.) \quad S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

moltiplico per q ambo i membri:

$$(..) \quad q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

Sottraggo $(..) - (.)$

$$q S_n - S_n = \cancel{a_1 q} - \cancel{a_1} + \cancel{a_1 q^2} - \cancel{a_1 q} + \cancel{a_1 q^3} - \cancel{a_1 q^2} + \dots + \cancel{a_1 q^{n-1}} - \cancel{a_1 q^{n-2}} + a_1 q^n - \cancel{a_1 q^{n-1}}$$

$$(q-1)S_n = a_1 q^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

ES

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_4 = 5 \quad d = 3 \quad a_1 = ?$$

$$\rightarrow a_1 = a_4 - (4-1)d = 5 - (3)3 = -4$$