INFINITESIMI E INFINITI

Def: Si dice che f è un infinitesimo per $x \to x_0$ se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0}$$

CONFRONTO FRA INFINITESIMI

Siano f e g due funzioni infinitesime per $x \to x_0$ $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \right)$, supponiamo che $\exists \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ allora

- se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto a $g(x)$
- se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \neq 0$ diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine
- se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty$ diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine minore rispetto a $g(x)$

<u>Def</u>: Si dice che f è un <u>infinito</u> per $x \to x_0$ se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

CONFRONTO FRA INFINITI

Siano f e g due funzioni infinite per $x \to x_0$ $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty \right)$, supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ allora

- se $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty$ diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine maggiore rispetto a $g(x)$
- se $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \neq 0$ diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine
- se $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine minore rispetto a $g(x)$

ESEMPIO

$f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ per $x \to 0$ che ordine di infinitesimo è?

Confronto $f(x)$ con $g(x) = x^\alpha$ e trovo α tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \neq 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^\alpha} = l \neq 0$$

ponendo $\alpha = 2$ ho $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} = 1 \neq 0$

Quindi diciamo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 2 perché messo a confronto con $g(x) = x^2$ ottengo che il limite del rapporto $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$ per $x \to 0$ è un numero diverso da zero.

ES

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\mathrm{sen}^2 x|}{|x^\alpha|} =$$

- se $\alpha = 2$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2} = 1$
- $(*)$
- $(**)$

$(*)$ se $\alpha > 2$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{|\mathrm{sen}^2 x|}{|x^\alpha|} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2\, x^{\alpha-2}} = \infty$

$(**)$ se $\alpha < 2$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{|\mathrm{sen}^2 x|}{|x^\alpha|} = 0$

ESEMPIO

$f(x)=\sqrt{4-x^4}-2$ per $x\to 0$ che ordine di infinitesimo è?

Per $x\to 0$ $f(x)\to 0$ quindi $f(x)$ è un infinitesimo.

Considero $g(x)=|x|^\alpha$ e confronto $g(x)$ con $f(x)$ per $x\to 0$,

quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|\sqrt{4-x^4}-2\right|}{|x|^\alpha}=$$

$$\sim \sqrt{4\left(1-\frac{x^4}{4}\right)}-2=2\left(\sqrt{1-\frac{x^4}{4}}-1\right)\overset{x\to 0}{\cong}\frac{x^4}{4}$$

sottointende la razionalizzazione

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left|4-x^4\cancel{+2}-4\right|}{|x|^\alpha\left|\sqrt{4-x^4}+2\right|}=\lim_{x\to 0}\frac{\left|\cancel{2}-x^4\right|}{|x|^\alpha\left|\sqrt{4-x^4}+2\right|}=$$

$$|\cancel{2}-x^4| \xrightarrow{x\to 0} |x|^4$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{4-\alpha}}{\left|\sqrt{4-x^4}+2\right|}=$$

- $4-\alpha>0$ $\alpha<4$ $=0$
- $4-\alpha=0$ $\alpha=4$ $=\frac{1}{4}$
- $4-\alpha<0$ $\alpha>4$ $=\infty$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \qquad (a\in\mathbb{R}^+) \qquad \left(\frac{0}{0}\right) \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(x-a)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$