

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, f(x) \text{ è una funzione, } y \text{ incognita.}$$

1) se $f(x) = 0$ OMOGENEA

$$ay'' + by' + cy = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (*)$$

• se $\Delta > 0$ (r_1 ed r_2 soluzioni di $(*)$), l'integrale generale è:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

• se $\Delta = 0$ (r è soluzione doppia di $(*)$) e l'integrale generale è:

$$y = e^{rx} (c_1 + c_2 x)$$

• se $\Delta < 0$ (le soluzioni sono complesse coniugate: $r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$), l'integrale generale è:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

2) $f(x) \neq 0$ NON OMOGENEA

l'equazione è: $ay'' + by' + cy = f(x)$ $(**)$

l'integrale generale di $(**)$ si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea $ay'' + by' + cy = 0$ un integrale particolare dell'equazione originaria.

ESEMPIO

$$y'' - 2y' + y = x^2$$

- Trovo le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 2y' + y = 0$
- l'equazione caratteristica è $r^2 - 2r + 1 = 0$ le cui soluzioni sono $r = 1$ con molteplicità 2 volte.
- La soluzione generale è $y = e^{1x}(c_1 + c_2x)$
- Ora trovo l'integrale particolare: al secondo membro ho $y = x^2$; siccome $x=0$ non è soluzione dell'equazione CARATTERISTICA, cerco un integrale particolare definito da un polinomio di 2° grado:

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Mi calcolo $g'(x)$, $g''(x)$ e sostituisco nell'equazione di partenza:

$$g'(x) = 2Ax + B \quad ; \quad g''(x) = 2A$$

$$\underbrace{2A}_{y''} - 2 \underbrace{(2Ax + B)}_{y'} + \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_y = \underbrace{x^2}_{f(x)}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -4A + B = 0 \\ 2A - 2B + C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ C = 6 \end{cases} \quad g(x) = x^2 + 4x + 6$$

L'integrale generale è $y = e^x(c_1 + c_2x) + x^2 + 4x + 6$

ESEMPIO

$$y'' - 9y = e^{3x}$$

Trovo l'integrale generale dell'omogenea $y'' - 9y = 0$
l'equazione caratteristica: $r^2 - 9 = 0$ $r_1 = 3$ $r_2 = -3$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

$$f(x) = e^{3x}$$

- Trovo l'integrale particolare: siccome 3 è soluzione dell'equazione caratteristica cerchiamo un integrale particolare del tipo:

$$g(x) = Ax e^{3x}$$

$$g'(x) = A e^{3x} + 3Ax e^{3x} \quad g''(x) = 3A e^{3x} + 3A e^{3x} + 9Ax e^{3x}$$

$$\underbrace{3A e^{3x}(2 + 3x)}_{y''} - 9 \underbrace{(Ax e^{3x})}_y = \underbrace{e^{3x}}_{f(x)}$$

$$A = \frac{1}{6} \quad g(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{6} x e^{3x}$$

se

si cerca un integrale particolare del tipo:

$f(x)$ è polinomio di grado n

• $g(x) = P_n(x)$, se 0 non è radice dell'equazione caratteristica

• $g(x) = x P_n(x)$, se 0 è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità 1

• $g(x) = x^2 P_n(x)$ se 0 è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità 2.

$f(x) = h e^{kx}$

• $g(x) = A e^{kx}$ se k non è radice dell'equazione caratteristica

• $g(x) = A x e^{kx}$ se k è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità 1.

• $g(x) = A x^2 e^{kx}$ se k è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità 2.

$f(x) = h \sin kx$
oppure

$f(x) = h \cos kx$

• $g(x) = A \sin kx + B \cos kx$ se $\pm i k$ non sono radici complesse dell'equazione caratteristica

• $g(x) = x (A \sin kx + B \cos kx)$ se $\pm i k$ sono radici complesse dell'equazione caratteristica