LA TOPOLOGIA DELLA RETTA

INTERVALLI

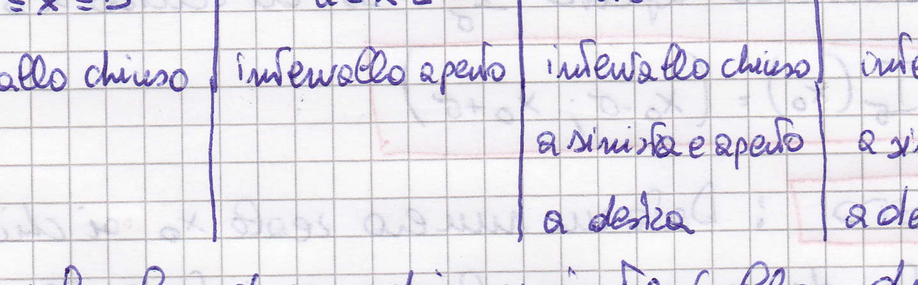
Def: un intervallo è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde ad una SEMIRETTA (intervallo illimitato) o ad un SEGMENTO (intervallo limitato) della retta reale

INTERVALLO
- CHIUSO (gli estremi appartengono all'intervallo)
- APERTO (gli estremi non appartengono all'intervallo)

INTERVALLI LIMITATI

$[a,b]$	(a,b)	$[a;b)$	$(a;b]$
$a \leq x \leq b$	$a < x < b$	$a \leq x < b$	$a < x \leq b$
intervallo chiuso	intervallo aperto	intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra	intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

OSS: • la lunghezza di un intervallo di estremi a, b è $\boxed{b-a}$ che è detta AMPIEZZA dell'intervallo.
• il raggio dell'intervallo è $\boxed{\frac{b-a}{2}}$
• il centro dell'intervallo è $\boxed{\frac{b+a}{2}}$



INTERVALLI ILLIMITATI

a	a	b	b
$[a;+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(-\infty;b]$	$(-\infty;b)$
$x \geq a$	$x > a$	$x \leq b$	$x < b$
intervallo chiuso, illimitato superiormente	intervallo aperto, illimitato superiormente	intervallo chiuso illimitato inferiormente	intervallo aperto illimitato inferiormente

INTORNI DI UN PUNTO

Df: $\boxed{\text{INTORNO CIRCOLARE}}$: Dato un numero reale x_0 e un numero reale positivo σ, si chiama intorno circolare di x_0 e raggio σ, l'intervallo aperto $I_\sigma(x_0)$ di centro x_0 e raggio σ:

$$\boxed{I_\sigma(x_0) = (x_0 - \sigma;\ x_0 + \sigma)}$$

Df: $\boxed{\text{INTORNO COMPLETO}}$: Dato un numero reale x_0 si chiama intorno completo di x_0 un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ contenente x_0:

$$\boxed{I(x_0) = (x_0 - \sigma_1\ ,\ x_0 + \sigma_2)}$$

Df: $\boxed{\text{INTORNO DESTRO}}$: sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ allora

$$I^+_\sigma(x_0) = (x_0;\ x_0 + \sigma)$$

$\boxed{\text{INTORNO SINISTRO}}$: sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ allora

$$I^-_\sigma(x_0) = (x_0 - \sigma;\ x_0)$$

INTORNI DI INFINITO

Df: $\boxed{\text{INTORNO DI } -\infty}$ dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$\boxed{I(-\infty) = (-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}}$$ intervallo illimitato inferiormente.

Df: $\boxed{\text{INTORNO DI } +\infty}$ dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$\boxed{I(+\infty) = (b; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > b\}}$$ intervallo illimitato superiormente

Df: $\boxed{\text{INTORNO DI } \infty}$ $I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x < a \vee x > b\}$

INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI

$F \subseteq \mathbb{R}$ è:

- SUPERIORMENTE LIMITATO se $\exists\, a \in \mathbb{R}$ non necessariamente appartenente a F tale che $x \leq a \ \forall x \in F$. a è detto MAGGIORANTE di F.
- INFERIORMENTE LIMITATO se $\exists\, b \in \mathbb{R}$ non necessariamente appartenente a F tale che $x \geq b \ \forall x \in F$. b è detto MINORANTE di F
- LIMITATO se è limitato sia inferiormente che superiormente.

- ILLIMITATO SUPERIORMENTE se scelto comunque un $m \in \mathbb{R}$ $\exists (x \in \mathbb{R}$ con$)\, x \in F$ tale che $x > m$.
- ILLIMITATO INFERIORMENTE se scelto comunque un $n \in \mathbb{R}$ $\exists (x \in \mathbb{R}$ con$)\, x \in F$ tale che $x < n$

- ILLIMITATO se è illimitato superiormente e inferiormente.

ES (*)

$A = \left\{ x \,/\, x = \frac{2n}{n+1} \text{ con } n \in N \right\}$

i suoi elementi sono $0, 1, \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}; \frac{5}{3}; \dots$

$\begin{array}{r|l} 2n & n+1 \\ \hline -2n-2 & 2 \\ // \;\; -2 & \end{array}$ $\qquad \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow 2$ se n cresce ($\rightarrow +\infty$)

quindi tutti gli elementi di A sono più piccoli di 2 ovvero 2 è un maggiorante per A.

0 è il minimo (perché 0 è estremo inferiore che appartiene ad A).

GLI ESTREMI DI UN INSIEME

Def: **ESTREMO SUPERIORE** Dato $E \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato, si dice estremo superiore di E quel numero reale M tale che:

- $x \leq M \;\; \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in E : \;\; x > M - \varepsilon$

ESTREMO INFERIORE Dato $E \subset \mathbb{R}$ inferiormente limitato, si dice estremo inferiore di E quel numero reale L tale che

- $x \geq L \;\; \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in E : \; x < L + \varepsilon$

Def: $\boxed{\text{MASSIMO}}$ Se l'estremo superiore appartiene ad E allora si chiama MASSIMO

- $\boxed{\text{MINIMO}}$ Se l'estremo inferiore appartiene ad E allora si chiama MINIMO

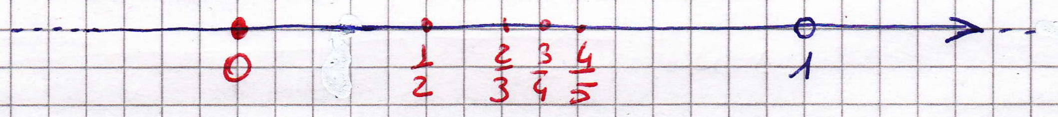
- Se un insieme E è illimitato superiormente allora $\boxed{sup_E = +\infty}$
- Se un insieme E è illimitato inferiormente allora $\boxed{inf_E = -\infty}$

I PUNTI ISOLATI

Def: Dato un insieme A sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e dato $x_0 \in A$ si dice x_0 PUNTO ISOLATO di A se $\exists\, I$ di x_0 che non contiene altri elementi di A.

ES

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots, \frac{n}{n+1}\right\}, \; n \in \mathbb{N}$$



Tutti gli elementi di A sono punti isolati

I PUNTI DI ACCUMULAZIONE

Def: Si dice che il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$ se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.