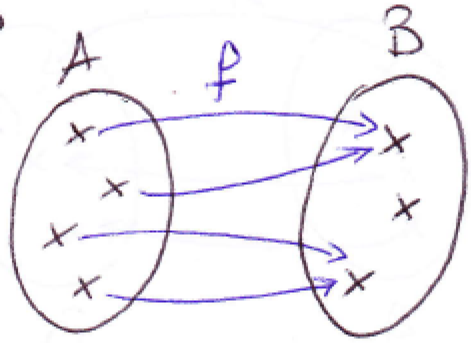
ANALISI 1

FUNZIONI

Cos'è una funzione?

Operativamente sono 3 cose:

1) un insieme di partenza A
2) un insieme di arrivo B
3) Una serie di regole che ad ogni $a \in A$ associa un unico elemento $b = f(a) \in B$



$f: A \to B$

↑ insieme di partenza ↑ insieme arrivo

Grafico di una funzione

$$G_f = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

OSS. Il grafico di una funzione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

FUNZIONI INIETTIVE E SURIETTIVE

- Una funzione f è INIETTIVA se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B.

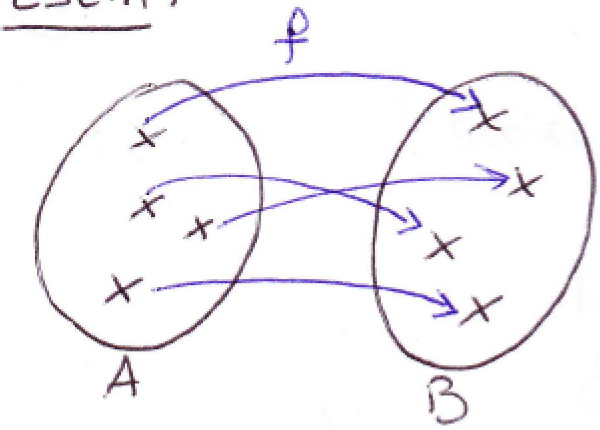
REGOLA: $\boxed{\forall a_1, a_2 \in A \text{ con } a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)}$

oppure (che è lo stesso) se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

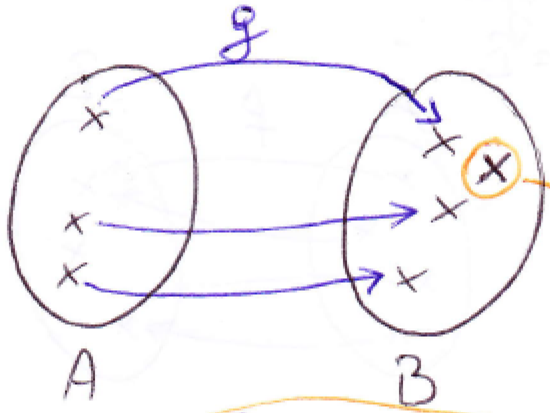
- Una funzione f è SURIETTIVA se ogni elemento di B proviene da almeno un elemento di A.

REGOLA: $\boxed{\forall b \in B \ \exists a \in A : b = f(a)}$

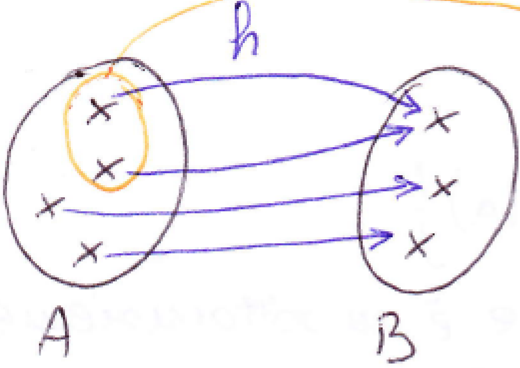
ESEMPI



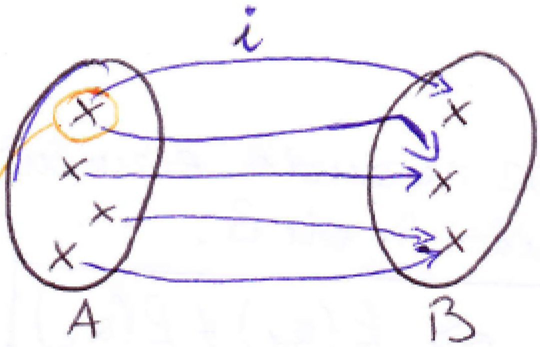
- f è iniettiva (frecce che partono da punti diversi arrivano in punti diversi)
- f è suriettiva (ogni punto in arrivo è raggiunto da almeno una freccia)



- g è iniettiva (...)
- g non è suriettiva



- h non è iniettiva
- h è suriettiva (...)



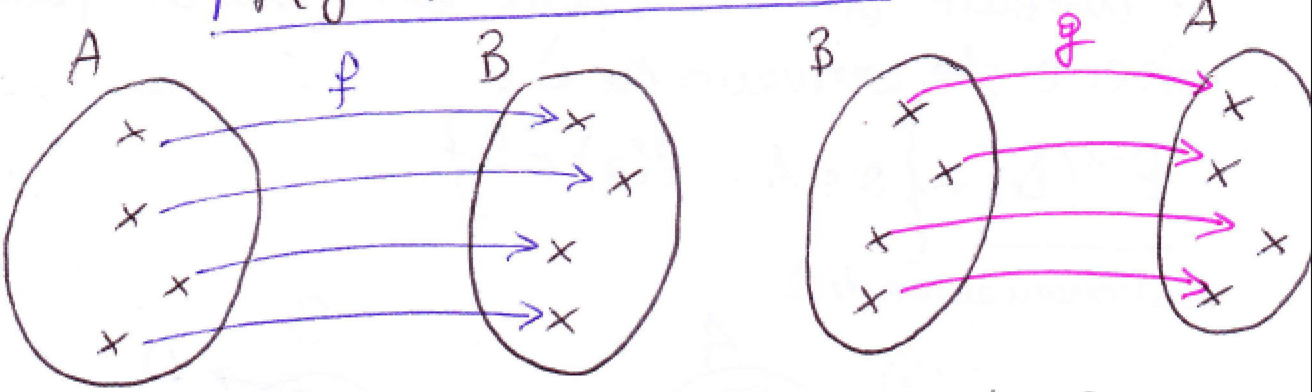
- i non è una funzione

da un punto non possono partire più di una freccia.

Def: • f è BIIETTIVA se è iniettiva e suriettiva

Teorema: Una funzione $f: A \to B$ è biiettiva se e solo se è invertibile e cioè se e solo se $\exists\, g: B \to A$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall\, a \in A \\ f(g(b)) = b & \forall\, b \in B \end{array}}$$



OSS. • f è iniettiva se e solo se in ogni $b \in B$ arrivano $\boxed{0 \text{ o } 1 \text{ freccia}}$.

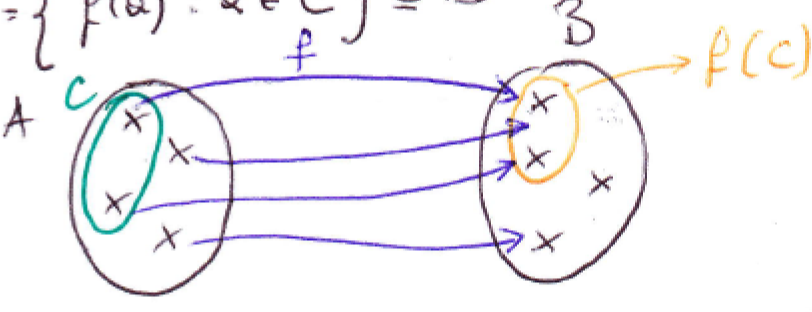
• f è suriettiva se e solo se in ogni $b \in B$ arrivano $\boxed{1 \text{ o più frecce}}$.

• f è biiettiva se e solo se in ogni $b \in B$ arriva $\boxed{1 \text{ e solo } 1 \text{ freccia}}$.

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Sia $f: A \to B$ una funzione. Sia $C \subseteq A$. Si dice immagine di C, l'insieme dei punti di B raggiunti da frecce che provengono da elementi di C:

$$f(C) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$$

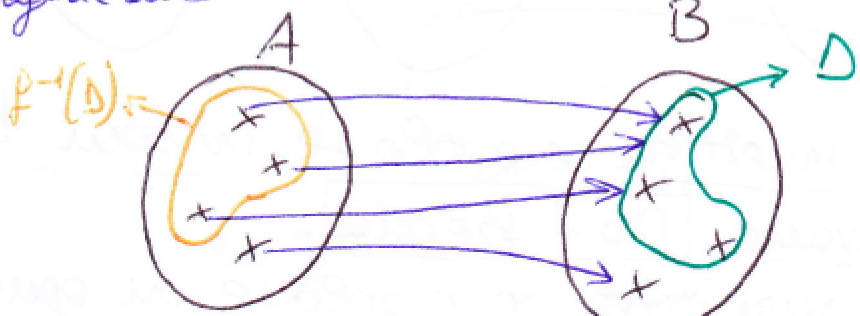


Df: Si dice <u>immagine</u> di A l'insieme

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \} = \text{tutti gli elementi di } B \text{ che sono stati raggiunti da frecce.}$$

Df: Sia $f: A \to B$ funzione.
Sia $D \subseteq B$. Si dice <u>controimmagine</u> di D l'insieme di tutti i punti di A da cui partono frecce che arrivano in D.

$$\underbrace{f^{-1}(D)}_{\text{controimmagine di } D} = \{ a \in A : f(a) \in D \}$$



OSS: f è suriettiva se e solo se $f(A) = B$ cioè ogni punto di B è raggiunto da frecce provenienti da A.

OSS: Per definire $f^{-1}(D)$ non serve che f sia invertibile