EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Def: L'equazione differenziale ha per incognite $x, y(x); y'(x); \dots$

- Si dice <u>ORDINE</u> di una equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione
- FORMA GENERALE
$$\Phi(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(k)}(x)) = 0 \qquad \Phi: D \to \mathbb{R}$$
- FORMA NORMALE
$$y^{(k)}(x) = F(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(k-1)}(x))$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$y' = ay + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$ ha infinite soluzioni.

se $a = 0$ $\quad y' = b \quad \boxed{y = bx + C}$

se $a \neq 0$ $\quad y' = ay + b \quad \boxed{y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$

INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- se $a = 0$ $\quad \begin{cases} y' = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ la soluzione è $y - y_0 = b(x - x_0)$

- se $a \neq 0$ $\quad \begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$y' - ay = b$ moltiplico per e^{-ax} ambo i membri:

$$\underbrace{y'e^{-ax} - aye^{-ax}}_{\text{è la derivata di } ye^{-ax}} = be^{-ax} \quad \text{ottengo} \quad (y(x)e^{-ax})' = be^{-ax}$$

$$\begin{cases} (y(x)e^{-ax})' = be^{-ax} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \int_{x_0}^{x} (y(s)e^{-as})' ds = \int_{x_0}^{x} be^{-as} ds \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

si ottiene $y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

- se $b = 0$ l'equazione differenziale si dice OMOGENEA.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = y - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - y = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array} \qquad e^{-x}$$

$$e^{-x} y'(x) - e^{-x} y(x) = -1 e^{-x} \qquad \left(y(x) e^{-x} \right)' = -e^{-x}$$

$$\int_0^x \left(y(s) e^{-s} \right)' ds = -\int_0^x e^{-s} ds \qquad y(s) e^{-s} \Big|_0^x = e^{-s} \Big|_0^x$$

$$y(x) e^{-x} - y(0) e^{-0} = e^{-x} - e^{-0}$$

$$y(x) e^{-x} \cancel{-1} = e^{-x} \cancel{-1} \qquad y(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \qquad \boxed{y(x) = 1}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = -2y + 1 \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \end{array} \qquad e^{2x}$$

$$y' + 2y = 1 \qquad y' e^{2x} + 2y e^{2x} = 1 e^{2x} \qquad \left(y(x) e^{2x} \right)' = e^{2x}$$

$$\int_0^x \left(y(s) e^{2s} \right)' ds = \int_0^x e^{2s} ds \qquad y(s) e^{2s} \Big|_0^x = \frac{1}{2} e^{2s} \Big|_0^x$$

$$y(x) e^{2x} - y(0) e^{0} = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{0}$$

$$y(x) e^{2x} - 3 = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \qquad y(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2 e^{2x}}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{-2x}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 2y - 6 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -6 \end{array} \qquad e^{-2x} \qquad \boxed{e^{-ax}}$$

$$y' - 2y = -6 \qquad \left[y' e^{-2x} - 2y e^{-2x} \right] = -6 e^{-2x}$$

$$\left(y(x) e^{-2x} \right)' = -6 e^{-2x} \qquad \int_0^x \left(y(s) e^{-2s} \right)' ds = \int_0^x -6 e^{-2s} ds$$

$$y(s) e^{-2s} \Big|_0^x = +3 e^{-2s} \Big|_0^x \qquad y(x) e^{-2x} - y(0) e^{-0} = +3 e^{-2x} - \left(+3 e^{-0} \right)$$

$$y(x) e^{-2x} - 2 = +3 e^{-2x} - 3 \qquad y(x) = 3 - e^{2x}$$

$$\frac{y(x) \cancel{e^{-2x}}}{\cancel{e^{-2x}}} = \frac{3 \cancel{e^{-2x}}}{\cancel{e^{-2x}}} - \frac{1}{e^{-2x}}$$

LEGGE DI CADUTA DEI GRAVI

Supponiamo di considerare la caduta di pallina in un fluido dove è presente l'attrito:

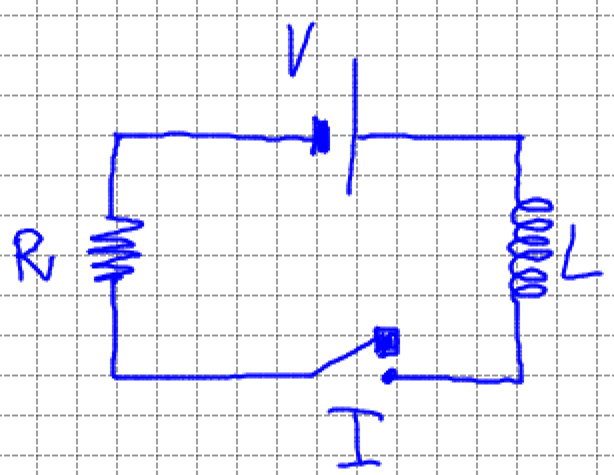
$$m v'(t) = mg - K v(t)$$

$$v'(t) = g - \frac{K}{m} v(t)$$

se $\frac{K}{m} = 0$ $\qquad v(t) = g \cdot t + A$

se $\frac{K}{m} \neq 0$ $\qquad v(t) = \left(v_0 - \frac{gm}{K} \right) e^{-\frac{K}{m}t} + \frac{gm}{K}$

CIRCUITO ELETTRICO



EXTRACORRENTE DI CHIUSURA

$$\begin{cases} L i'(t) + R i(t) = V \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i'(t) = -\frac{R}{L} i(t) + \frac{V}{L} \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

EXTRACORRENTE DI APERTURA

$$\begin{cases} i'(t) = -\frac{R}{L} i(t) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$