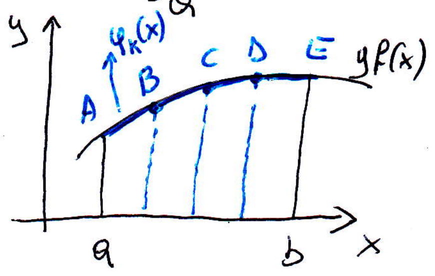
Il teorema di Guldino

Se ruotiamo un grafico $y = f(x) \geq 0$ con $x \in [a,b]$ intorno all'asse delle ascisse otteniamo una SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE:

$$Area = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$



Scomponiamo l'intervallo $[a;b]$ in n parti tali che la lunghezza di ogni parte è $h = \frac{b-a}{n}$; facciamo ruotare la poligonale P attorno all'asse x allora l'area della superficie di rotazione è data dalla somma delle aree dei tronchi di cono che la compongono:

$$A(P) = 2\pi \int_a^{a+h} \varphi_1(x)\sqrt{1+\varphi_1'(x)^2}\,dx + 2\pi \int_{a+h}^{a+2h} \varphi_2(x)\sqrt{1+\varphi_2'(x)^2}\,dx + \dots$$

$$\dots + 2\pi \int_{a+(n-1)h}^{b} \varphi_n(x)\sqrt{1+\varphi_n'(x)^2}\,dx \simeq 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx .$$

BARICENTRO

Se m e M sono il minimo e Massimo di $y = f(x)$ in $[a,b]$ si ha

$$m\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \leq \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \leq M\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

indicando con $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ si ha

$$m \leq \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \leq M$$

poniamo $y_G = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$$\boxed{Area_x = 2\pi |y_G| L} \longrightarrow \boxed{\text{TEOREMA DI GULDINO}}$$

$$\boxed{Area_y = 2\pi |x_G| L}$$ si ottiene quando si ruota la curva sull'asse y