Def:

Sia $\bar{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, è detta FUNZIONE INTEGRALE

di $y = f(x)$ che è detta FUNZIONE INTEGRANDA

TEOREMA DI TORRICELLI - BARROW

Sia $y = f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$. La funzione integrale $\bar{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile per ogni $x \in [a,b]$ e

$$\bar{F}'(x) = f(x) \quad e \quad \bar{F}(a) = 0$$

Dim

Consideriamo in $[a,b]$ due punti x e $x+h$. Prendiamo il rapporto incrementale di $y = \bar{F}(x)$:

$$\frac{\Delta \bar{F}(x)}{\Delta x} = \frac{\bar{F}(x+h) - \bar{F}(x)}{(x+h) - x} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

Per il Teorema della media $\exists\, c \in [x; x+h]$ tale che

$$f(c) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \Rightarrow h f(c) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$f(c) = \frac{\Delta \bar{F}(x)}{\Delta x} \Rightarrow \bar{F}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \bar{F}(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

$$\bar{F}'(x) = f(x)$$

$$\bar{F}(a) = 0 \Rightarrow \bar{F}(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

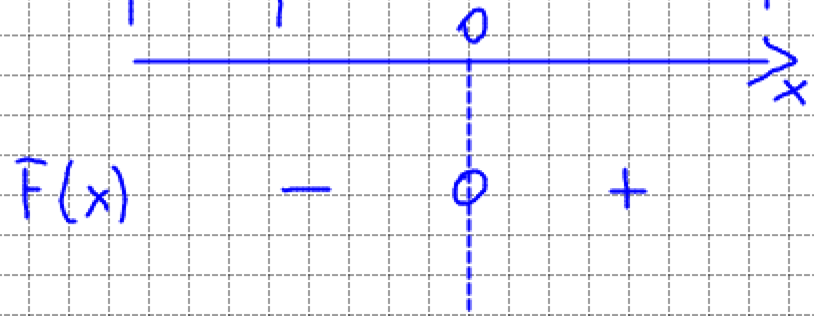
ESEMPIO

Studiare la funzione $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=e^{-x^2}$, $a=0$ e $f(x)$ è pari quindi $F(x)$ è dispari

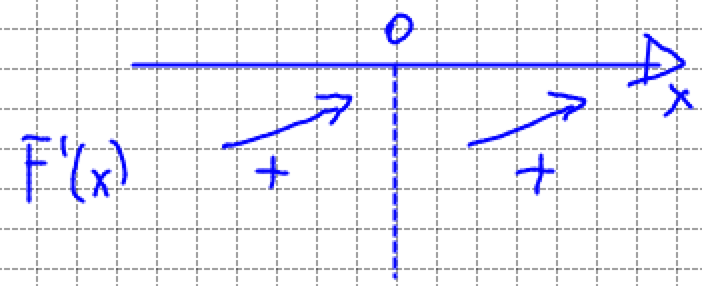
$F(x)>0$ per $x>0$

$F(x)<0$ per $x<0$



Per il teorema di Torricelli-Barrow si ha che

$$F'(x)=e^{-x^2}$$



$F'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}F'(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}=0$$

$$F''(x)=-2x\,e^{-x^2}$$