TEOREMA DELLA MEDIA

Se $y=f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$, esiste almeno un punto $c\in[a,b]$ tale che:

valor medio
$$\boxed{f(c)} = \frac{\int_a^b f(x)\,d(x)}{b-a}$$

Dim

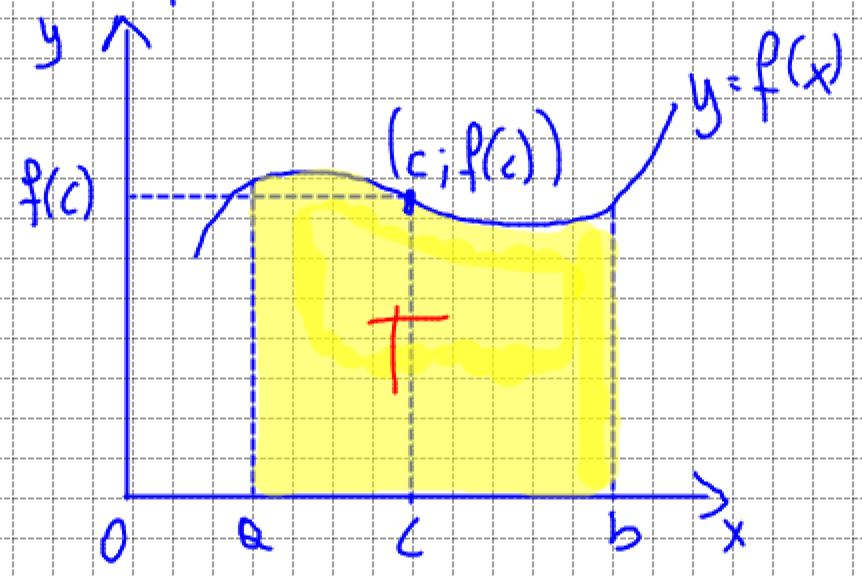
Indichiamo con $m=\min f(x)$, $M=\max f(x)$ in $[a,b]$, quindi $m\le f(x)\le M \Rightarrow$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M$$

$\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ è un numero compreso tra m (minimo) e M (massimo) di $f(x)$ in $[a,b]$ allora per il Teorema dei valori intermedi esiste un punto $c\in[a,b]$ tale che

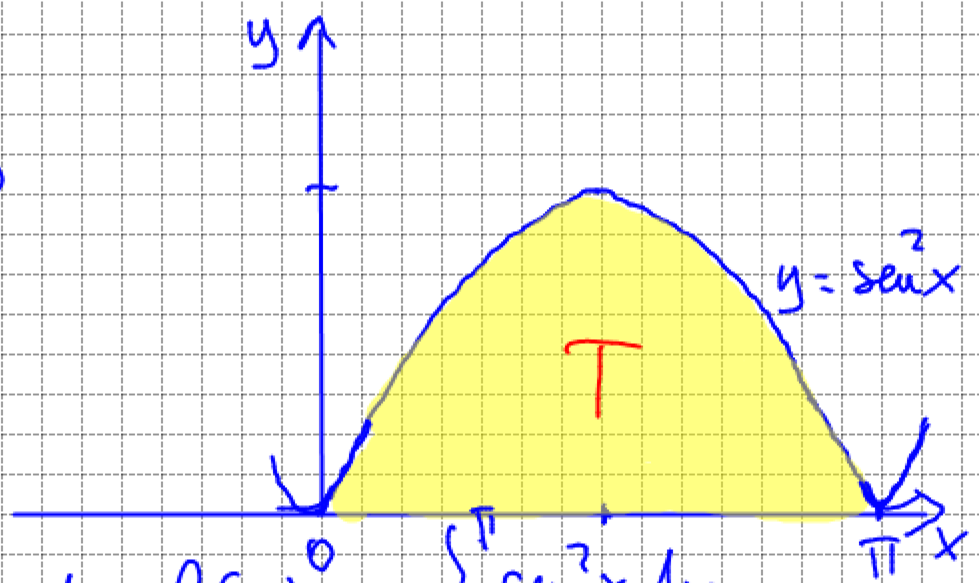
$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$



ESEMPIO

$y=\operatorname{sen}^2 x \quad [0;\pi]$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx =$$



$\exists\, c\in[0;\pi]$ tale che $f(c)=\dfrac{\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx}{\pi-0} \Rightarrow$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi\operatorname{sen}^2 c$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}=\pi\operatorname{sen}^2 c \Rightarrow \operatorname{sen}^2 c=\frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} c=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c=\frac{\pi}{4} \quad e \quad c=\frac{3}{4}\pi$$