

PROBLEMA 3 Evoluzione di una popolazione di camosci

In un parco naturale vengono immessi 72 camosci. A causa di limitazioni dovute alle risorse di cibo che l'ambiente può fornire, si stima che a lungo andare la popolazione di camosci potrà avvicinarsi sempre di più alla soglia limite di 1800 esemplari, senza tuttavia mai superarla.

La crescita della popolazione di camosci può essere modellizzata tramite una funzione della forma:

$$P(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 2^{-\frac{t}{5}}}, \text{ con } t \geq 0$$

dove $P(t)$ rappresenta con buona approssimazione il numero di camosci dopo un tempo t (misurato in anni) dal momento della loro immissione ($t = 0$).



1 Dai dati che si hanno a disposizione, ricava i valori di a e b che si adattano alla situazione descritta.

2 Stima, in base al modello che hai determinato, quale sarà il numero di camosci dopo 15 anni dalla loro immissione.

Trascorsi i suddetti 15 anni, purtroppo, la popolazione inizia a diminuire a causa di una malattia infettiva che porterà progressivamente alla morte di tutti gli esemplari.

3 Stabilisci quale delle seguenti funzioni può descrivere l'evoluzione della popolazione, per $t \geq 15$, motivando adeguatamente la risposta:

a. $P(t) = \frac{450}{(t + 15)^2 + 1}$

b. $P(t) = \frac{450}{(t - 15)^4 + 1}$

c. $P(t) = \frac{450t^2}{(t - 15)^2 + 1}$

d. $P(t) = \frac{450t^4}{(t - 15)^4 + 1}$

4 Studia e traccia il grafico, per $t \geq 0$, della funzione $P(t)$, definita a tratti, che descrive l'evoluzione della popolazione di camosci nell'ipotesi di comparsa della malattia, assumendo che l'evoluzione per $t \geq 15$ sia ben modellizzata dalla funzione individuata al punto precedente. Analizza in particolare che cosa accade per $t = 15$ dal punto di vista della continuità e della derivabilità. Tralascia lo studio di $P''(t)$ per $t \geq 15$, ma precisa il minimo numero di punti di flesso compatibile con le altre informazioni ricavate sul grafico della funzione.

5 Determina la velocità di crescita della popolazione nell'istante immediatamente precedente la comparsa della malattia infettiva e la velocità di decrescita della popolazione nell'istante immediatamente seguente tale evento.

6 In quale momento la velocità di crescita della popolazione di camosci è stata massima? E qual è il valore di tale velocità massima? Se non fosse sopraggiunta la malattia, in quale momento si sarebbe verificata la massima velocità di crescita?