

FORMULA DI TAYLOR. APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONE

Il polinomio di Taylor

$$P(x) = 1 + 3x + 4x^3 \quad x_0 = 1$$

$$\rightarrow P(x) = A(x-1)^0 + B(x-1)^1 + C(x-1)^2 + D(x-1)^3 \\ = A + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3$$

$$P(x_0) = P(1) = A \quad A = P(x_0)$$

$$P'(x) = B + 2C(x-1) + 3D(x-1)^2$$

$$P'(x_0) = P'(1) = B \quad B = P'(x_0)$$

$$P''(x) = 2C + 6D(x-1)$$

$$P''(x_0) = P''(1) = 2C \quad C = \frac{1}{2} P''(x_0)$$

$$P'''(x) = 6D$$

$$P'''(x_0) = 6D \quad D = \frac{1}{6} P'''(x_0)$$

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} P''(x_0)(x-x_0)^2 + \\ + \frac{1}{6} P'''(x_0)(x-x_0)^3$$

$$P(1) = 8$$

$$P'(1) = 3 + 12(1)^2 = 15$$

$$P''(1) = 24(1) = 24$$

$$P'''(1) = 24$$

$$P(x) = 8 + 15(x-1) + \frac{24}{2}(x-1)^2 + \\ + \frac{24}{6}(x-1)^3$$

FORMULA DI TAYLOR

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} P''(x_0)(x-x_0)^2 + \\ + \frac{1}{3!} P'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Teorema

Se $\varphi(x)$ è una funzione derivabile $(n+1)$ volte in I aperto e $x_0 \in I$ tale che

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n)}(x_0) = 0$$

$\forall x \in I$ si ha che

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\bar{x})(x-\bar{x})^{n+1}$$

dove $\bar{x} \in [x, x_0]$

TEOREMA DI TAYLOR

Se $y=f(x)$ è derivabile $(n+1)$ volte in I , $\forall x, x_0 \in I$ si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{n+1}$$

con $\bar{x} \in (x, x_0)$

dove $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{n+1} = R_n$

R_n = resto n-esimo del polinomio di Taylor

FORMULA DI MAC-LAURIN

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!} f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)(x-0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x-0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x-0)^{n+1}$$

ESEMPIO

$$f(x) = e^x \quad x = x_0$$

$$f(x) = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!} e^{x_0}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} e^{x_0}(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} e^{\bar{x}}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{dove } R_n = \frac{1}{(n+1)!} e^{\bar{x}}(x-x_0)^{n+1}$$

$$n=4 \quad x=1$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4$$

$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24}$$

$$R_4 = \frac{1}{5!} e^{\bar{x}} \cdot 1^5 = \frac{e^{\bar{x}}}{120} \quad \bar{x} \in [0, 1]$$

$$1 \leq e^{\bar{x}} \leq e < 3$$

$$\frac{1}{120} \leq \frac{e^{\bar{x}}}{120} \leq \frac{3}{120} \quad \frac{1}{120} \leq R_4 \leq \frac{3}{120}$$

$$R_7 = \frac{e^{\bar{x}}}{8!} \quad \frac{1}{40320} \leq \frac{e^{\bar{x}}}{40320} \leq \frac{3}{40320}$$

MASSIMI, MINIMI, FLESSI A TANGENTE ORIZZONTALE (con Taylor)

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile infinite volte in I (reale)

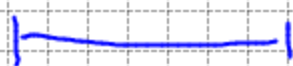
Sia $x_0 \in I$ e per $n \geq 1$ si ha

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

1) se $n+1$ è pari allora x_0 è

- PUNTO DI MASSIMO RELATIVO se $\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} < 0$
- PUNTO DI MINIMO RELATIVO se $\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} > 0$

2) se $n+1$ è dispari allora x_0 è PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE



$f(x)$

POLINOMI DI TAYLOR CON $x_0 = 0$

e^x

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$\sin x$

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$\cos x$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n!}x^{2n}$$

$\ln(1+x)$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n$$

$\frac{1}{1-x}$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n$$