DERIVATE SUCCESSIVE

Teorema 2

Sia $y=f(x)$ una funzione derivabile almeno 3 volte in (a,b), e sia $x_0 \in (a,b)$ allora e la $f'''(x)$ è continua in (a,b) e $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0)>0$ [o $f'''(x_0)<0$] allora il punto $(x_0; f(x_0))$ è un punto di flesso ascendente [discendente] a tangente orizzontale.

TEOREMA GENERALE

Sia $y=f(x)$ una funzione derivabile almeno n volte in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Sia inoltre

$$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=f^{IV}(x_0)=\dots\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

e $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ allora si hanno i seguenti casi:

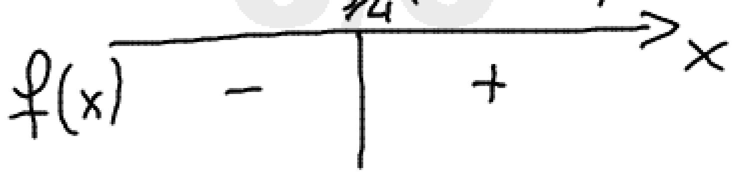
- Se n è PARI, $(x_0;f(x_0))$ è MASSIMO O MINIMO LOCALE a seconda che $f^{(n)}(x_0)<0$ o $f^{(n)}(x_0)>0$
- Se n è DISPARI, $(x_0,f(x_0))$ è un punto di FLESSO a tangente orizzontale ascendente o discendente a seconda che $f^{(n)}(x_0)>0$ o $f^{(n)}(x_0)<0$

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$$

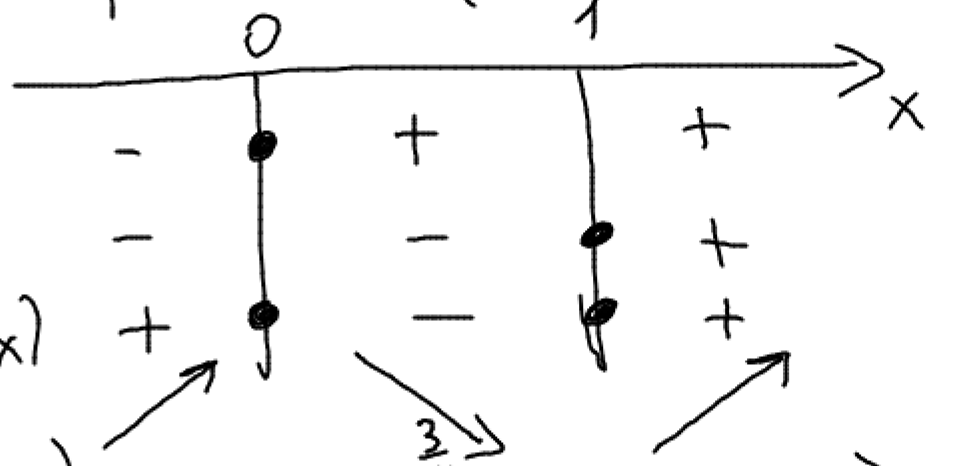
$$C.E._f = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$$

$$f(x) > 0 \qquad x^4\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{4}\right) > 0$$



$$f'(x) = \frac{5}{5}x^4 - \frac{4}{4}x^3$$

$$f'(x) = x^3(x-1) \geq 0$$



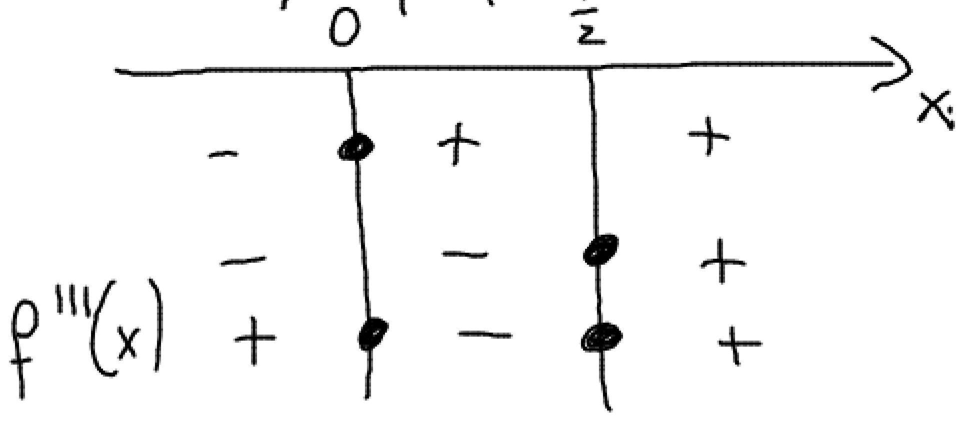
$$f''(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$f''(x) \geq 0$$

$$x^2(4x-3)$$

$$f'''(x) = 12x^2 - 6x$$

$$6x(2x-1) \geq 0$$



$$f^{(IV)}(x) = 24x - 6$$

$$f^{(IV)}(0) = -6 < 0$$

$(0;0)$ è massimo

ESEMPIO

$$f(x) = e^{x^3-x^2} \qquad C.E._f = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow e^{x^3-x^2} > 0$$ sempre positivo.

$$f'(x) = (3x^2-2x)\, e^{x^3-x^2} \qquad f'(x) \geq 0 \quad x(3x-2)\, e^{x^3-x^2} \geq 0$$

$x_1 = 0$

$x_2 = \frac{2}{3}$

$$f''(x) = (6x-2)\, e^{x^3-x^2} + (3x^2-2x)^2\, e^{x^3-x^2} \Rightarrow$$

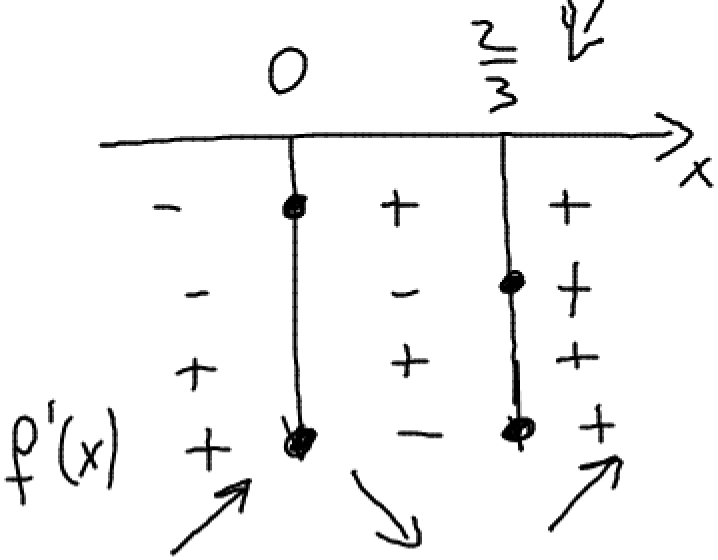
$$f''(x) = e^{x^3-x^2}\left[6x-2+(3x^2-2x)^2\right]$$

$$f''(x) = e^{x^3-x^2}\left[6x-2+9x^4+4x^2-12x^3\right]$$

$$f''(x) = e^{x^3-x^2}\left[9x^4-12x^3+4x^2+6x-2\right]$$

$$f''(0) = -2 < 0$$

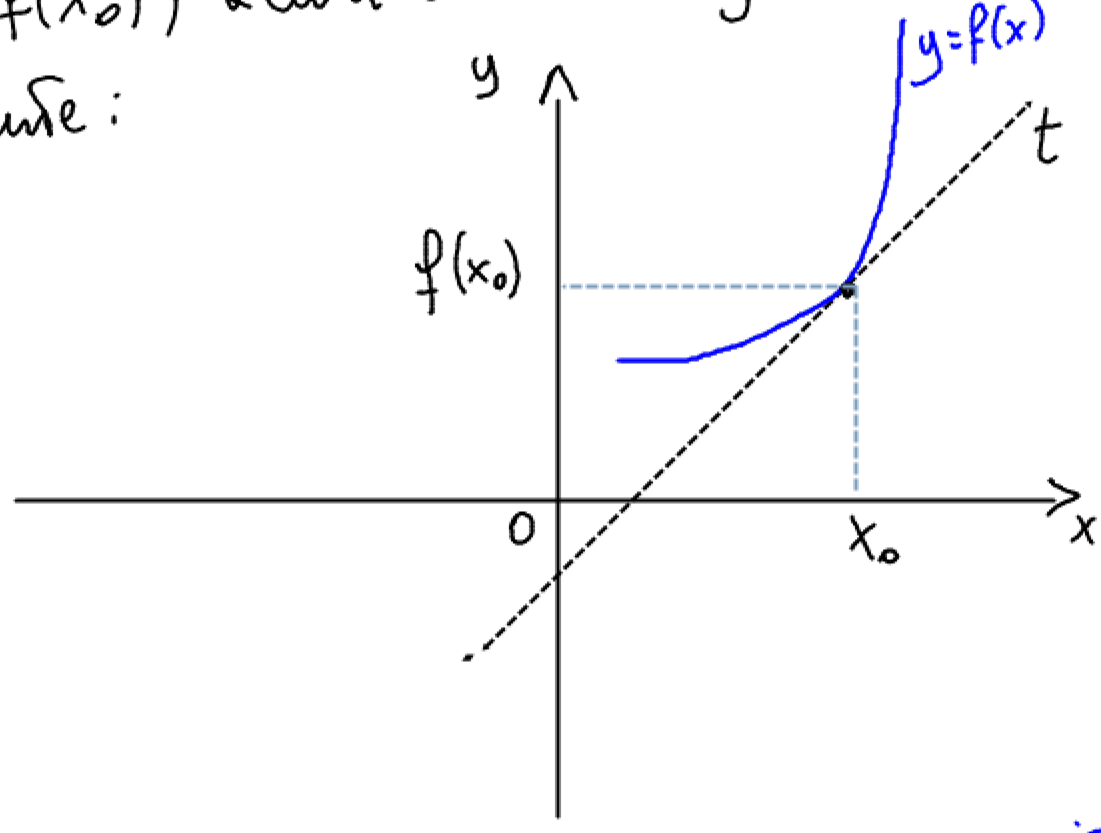
$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = e > 0$$



CONCAVITÀ, CONVESSITÀ, FLESSI

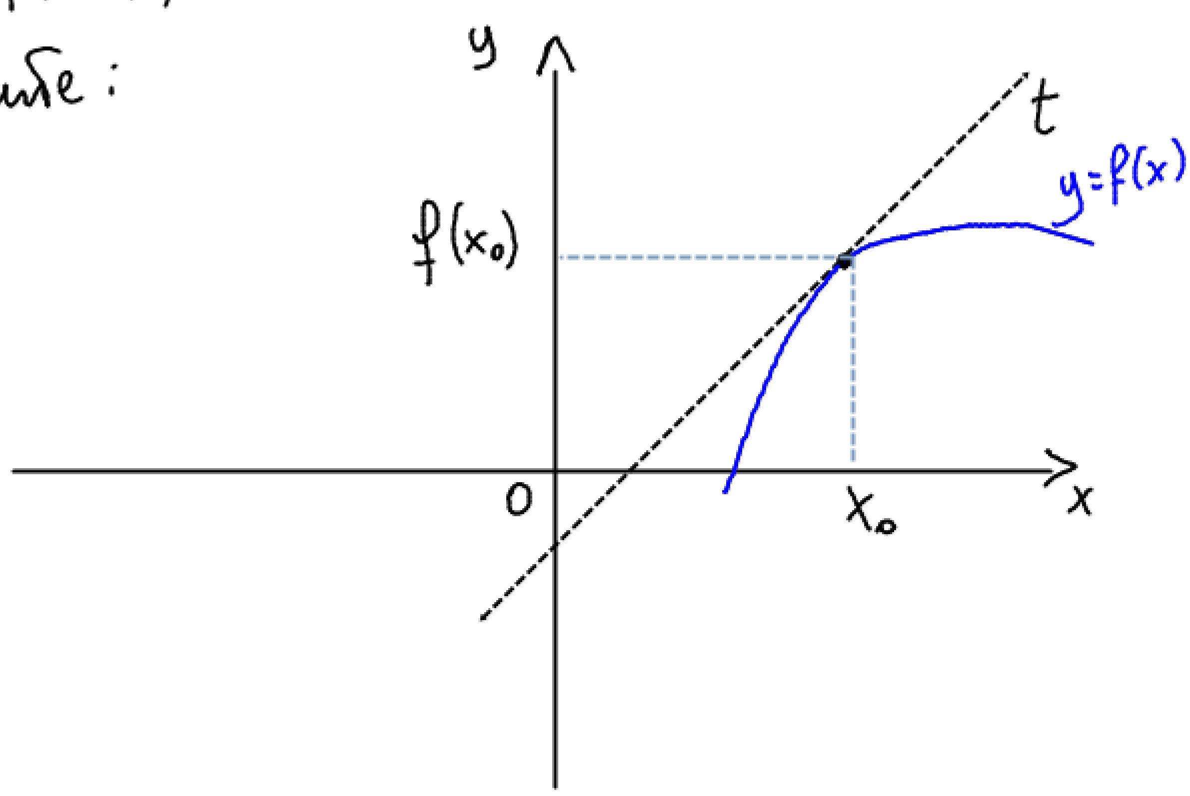
concavità verso l'alto

Def: Una funzione $y=f(x)$ si dice $\boxed{\text{CONVESSA}}$ in $(x_0; f(x_0))$ se dato un intorno I di x_0 e considerata la retta tangente alla curva $y=f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$ allora la curva $y=f(x)$ è sopra la retta tangente:



concavità verso il basso

Def: Una funzione $y=f(x)$ si dice $\boxed{\text{CONCAVA}}$ in $(x_0; f(x_0))$ se dato un intorno I di x_0 e considerata la retta tangente alla curva $y=f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$ allora la curva $y=f(x)$ è sotto la retta tangente:



<u>Def</u> $y = f(x)$ ha nel suo punto $(x_0, f(x_0))$ un <u>FLESSO</u> se in tale punto la curva attraversa la retta tangente