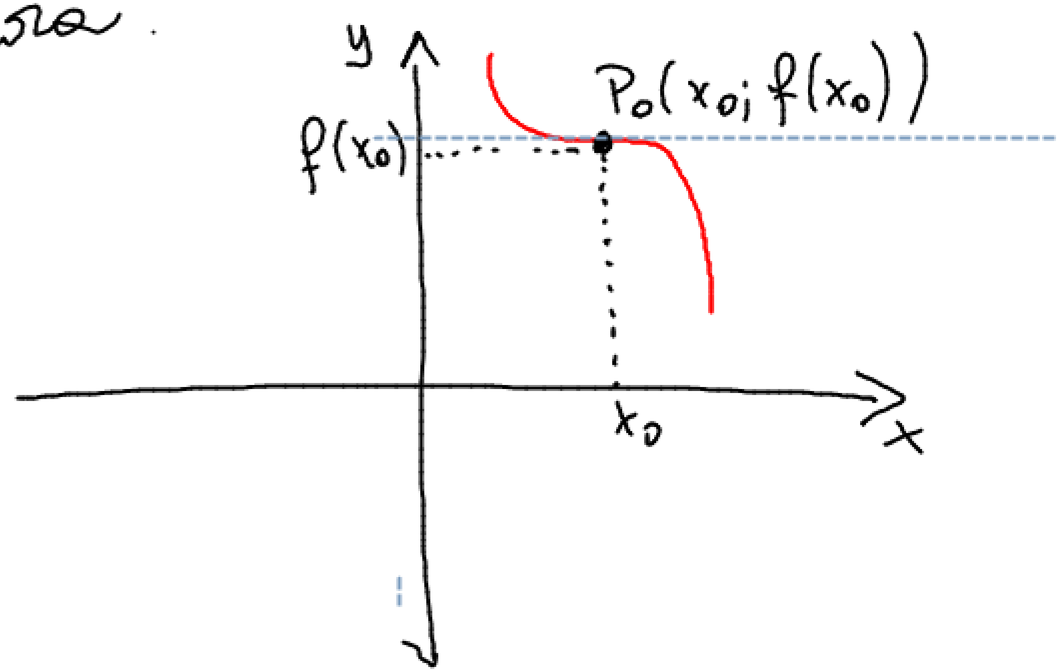
PUNTI A TANGENTE ORIZZONTALE

Sia $y=f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
Supponiamo che in $x_0 \in (a,b)$ $f'(x_0)=0$ e se $f'(x)<0$
$\forall x \in (a,b)-\{x_0\}$ allora:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	$\bullet$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	
$f''(x)$		$+$		$-$	



USO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Teorema Sia $y=f(x)$ una funzione derivabile almeno due volte in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$ allora se la derivata seconda è continua in (a,b) e

$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ oppure

$[f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0]$

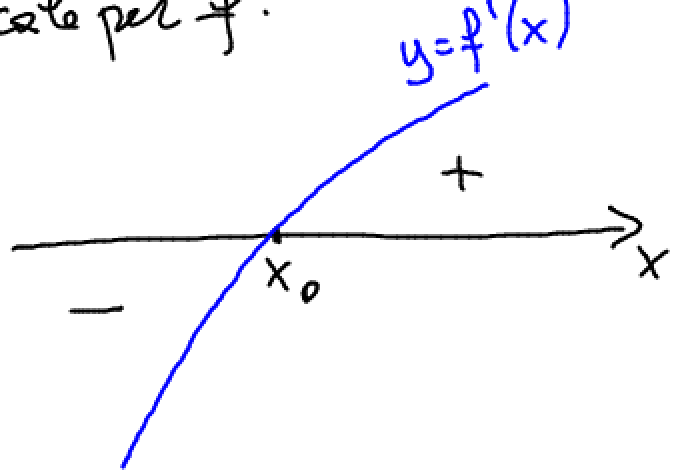
allora il punto $(x_0; f(x_0))$ è un punto di MINIMO [MASSIMO] locale.

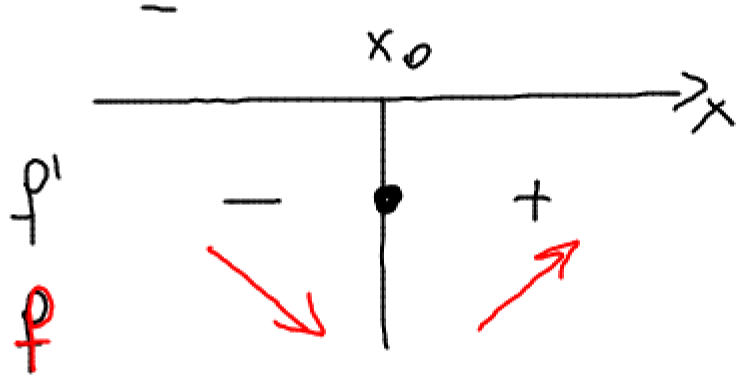
Dim

Supponiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$

Siccome $f''(x)$ è continua allora $\lim_{x \to x_0} f''(x) = f''(x_0)$.

Per il Teorema della permanenza del segno $\exists\, I_{x_0}$ in cui $f''(x)>0 \Rightarrow$ la funzione $f'(x)$ è crescente e siccome, per ipotesi $f'(x_0)=0 \Rightarrow f'$ sarà negativa prima di x_0 e positiva dopo x_0. Allora x_0 sarà un punto di MINIMO locale per f.





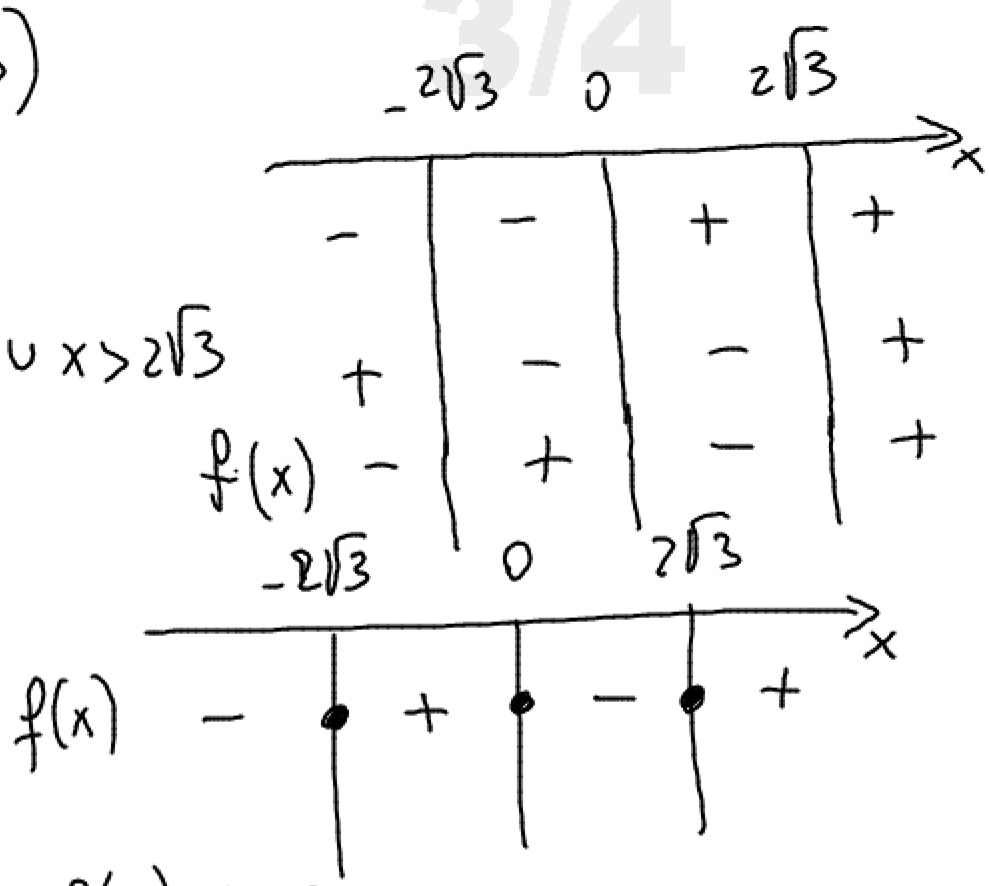
ESEMPIO

$f(x) = x^3 - 12x$

- $C.E._f = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$

- segno

$x(x^2-12) > 0$ → $x > 0$; $x < -2\sqrt{3} \cup x > 2\sqrt{3}$



- zeri e int. con assi

$x=0 \quad y=0 \quad O(0;0)$
$x=-2\sqrt{3} \quad y=0 \quad A(-2\sqrt{3};0)$
$x=2\sqrt{3} \quad y=0 \quad B(2\sqrt{3};0)$

- limiti e asintoti

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- simmetrie

$f(x) = x^3 - 12x \qquad f(-x) = (-x)^3 - 12(-x) = -x^3 + 12x \quad -f(-x) = x^3 - 12x$

$f(x) = -f(-x)$ FUNZIONE DISPARI

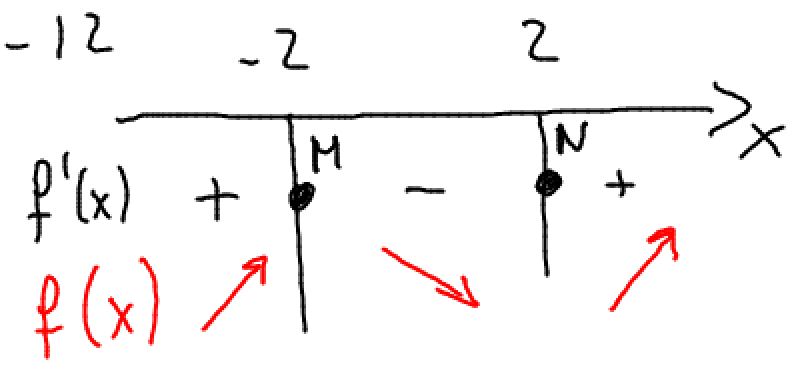
- studio derivata prima

$f(x) = x^3 - 12x \qquad f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) \geq 0 \qquad 3(x^2-4) \geq 0$

N $(2;-16)$ minimo

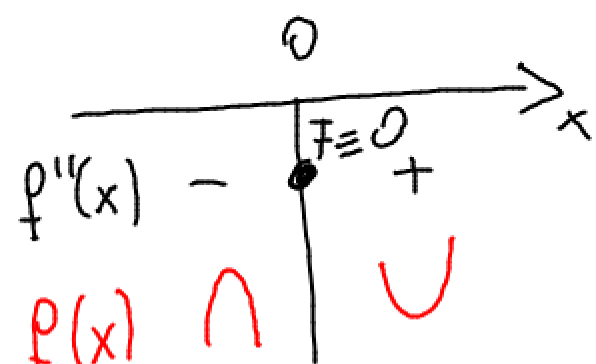
M $(-2;16)$ massimo

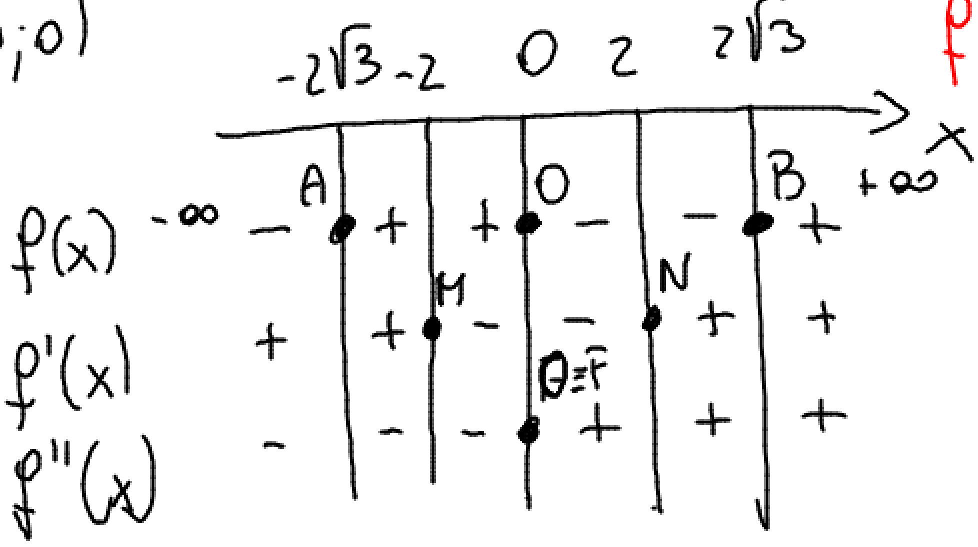


- studio derivata seconda

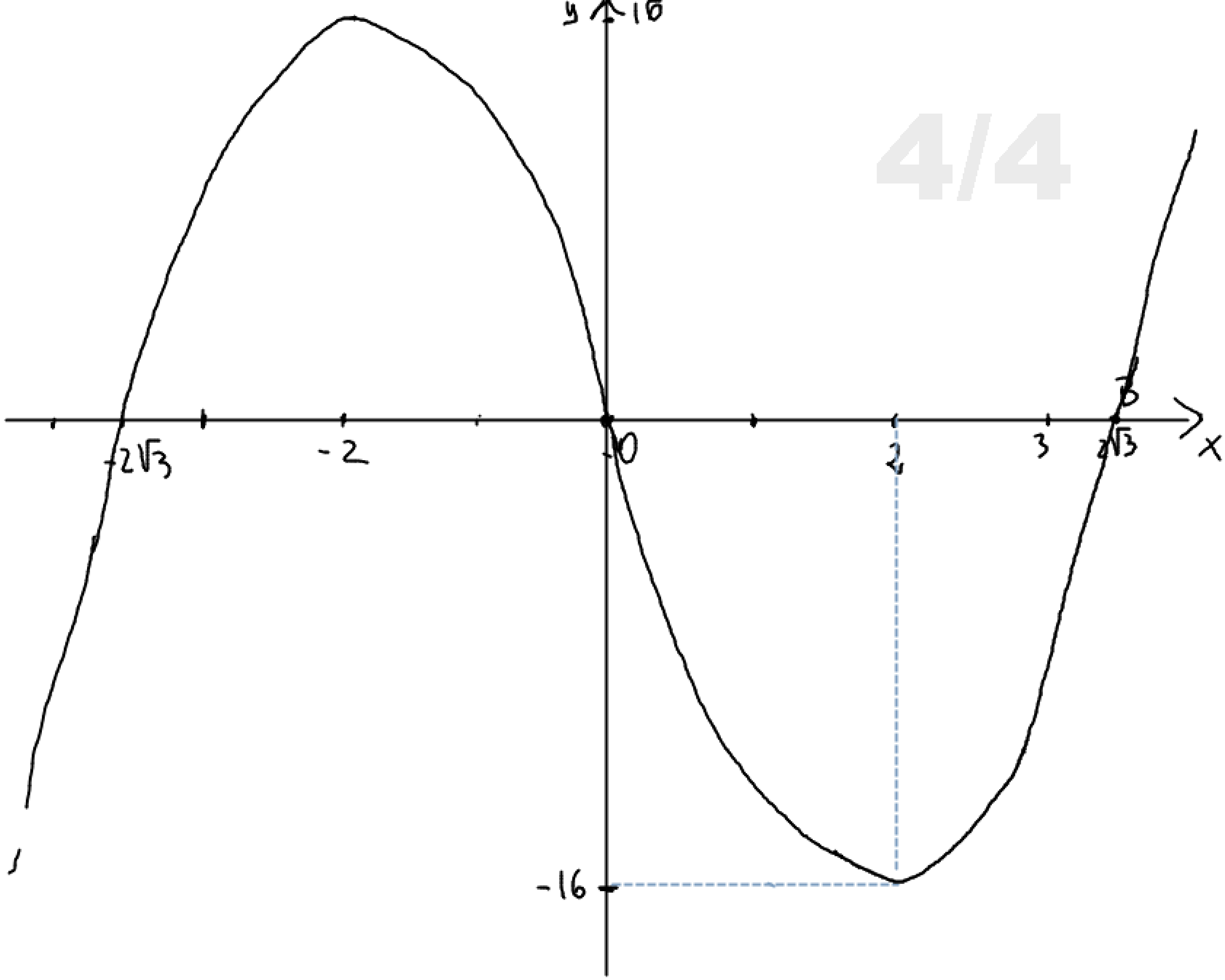
$f''(x) = 6x \qquad f''(x) \geq 0 \qquad 6x \geq 0$

$O(0;0)$





A, O, B zeri di f(x)
M massimo
N minimo
O flesso a Tg orizzontale


y
16
x
-2√3
-2
0
2
3
2√3
-16