

# TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Date  $y=f(x)$  e  $y=g(x)$  due funzioni definite in un intervallo  $I$  e  $a \in I$ .

Se:

- $y=f(x)$  e  $y=g(x)$  sono derivabili in  $I - \{c\}$ ,  $g'(x) \neq 0$ ,
- le due funzioni tendono a 0 (oppure a  $\infty$ ) per  $x \rightarrow c$
- $\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dim

Dimostriamo il teorema nel caso in cui  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ .

$y=f(x)$  e  $y=g(x)$  sono derivabili in  $I - \{c\}$  e sono anche continue in  $I - \{c\}$ . Allora possiamo assumere  $f(c) = g(c) = 0$  e  $y=f(x)$  e  $y=g(x)$  continue in tutto  $I$ .  
Le funzioni  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  e  $y = \frac{f'(x)}{g'(x)}$  sono definite in  $I - \{c\}$ .

Il Teorema di Rolle garantisce che anche  $g'(x) \neq 0 \forall x \in I - \{c\}$ .

Per il teorema di Cauchy  $\forall x \in I$  con  $x \neq c \exists x_2 \in I_{[x,c]}$   
Tale che  $\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}$

Allora  $\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}$  e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} = \lim_{x_2 \rightarrow c} \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OSS

Il teorema di De L'Hôpital può essere applicato a tutte le forme indeterminate e

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty, \infty - \infty; 0^0; 1^\infty; \infty^0$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} (-\tan x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x-1}} = \left[ \frac{+\infty}{-\infty} \right] \text{ (applico de L'Hôpital)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{2}{(x-1)^3}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2}{(x-1)^2} = -\infty$$

## LIMITI NOTEVOLI

2/2

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \alpha > 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \cdot \ln x) = 0 \quad \alpha > 0$$

Dim

$$1) \alpha > 0; \frac{\ln x}{x^\alpha} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$$2) \alpha > 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \begin{cases} \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha - 1 \leq 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = +\infty \\ \alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = +\infty \end{cases}$$

$$3) \alpha > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \ln x) = [0 \cdot (-\infty)]$$

poniamo  $t = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^+ \quad t \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln 1 - \ln t}{t^\alpha} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} - \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$