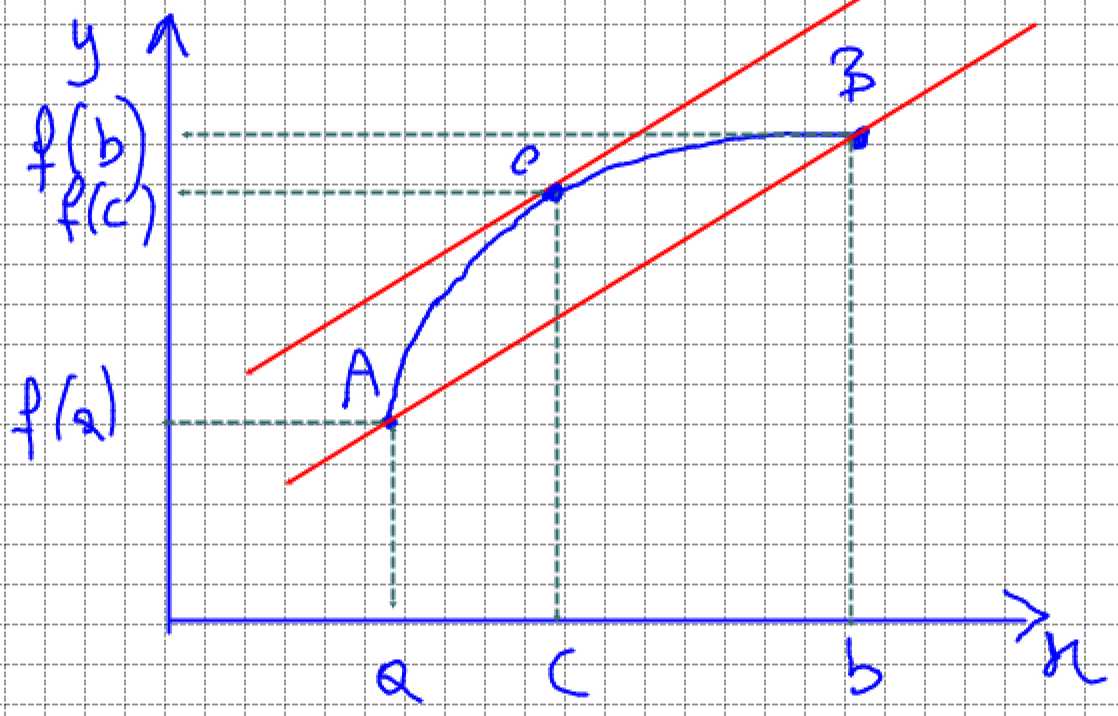
TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $y=f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora $\exists$ almeno un $c\in(a,b)$ tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



Dim

Sia $F(x)=f(x)-\varphi(x)$ $\quad \varphi(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$$F(a)=f(a)-\varphi(a)=\cancel{f(a)}-\cancel{f(a)}-\cancel{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)}$$

$$F(a)=0$$

$$F(b)=f(b)-\varphi(b)=f(b)\cancel{-f(a)}-\left[\frac{\cancel{f(b)-f(a)}}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a})\right]$$

$$F(b)=0$$

Allora
- $F(x)$ è continua in $[a,b]$ (perchè combinazione lineare di funzioni continue).
- $F(x)$ è derivabile in (a,b) (per costruzione)
- $F(a)=F(b)$

$y=F(x)$ verifica le tre condizioni del Teorema di Rolle allora $\exists$ almeno un punto $c\in(a,b)$ tale che:

$$F'(c)=0 \iff f'(c)-\varphi'(c)=0$$

$$\iff f'(c)=\varphi'(c)$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

TEOREMA 1L

Se una funzione $y=f(x)$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e tale che $f'(x)=0$ per ogni $x\in(a,b)$ allora $f(x)=y$ è **COSTANTE** in $[a,b]$.

Dim

Sia $x\in[a,b]$ e $c\in(a,x)$, applicando il Teorema di Lagrange in $c\in(a,x)$ si ha:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0 \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \iff$$

$$f(x)=f(a) \quad \forall\, x\in[a,b]$$

Teorema 2L

Siano $y=f(x)$ e $y=g(x)$ due funzioni continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e $f'(x)=g'(x)$ $\forall\, x\in(a,b)$.
Allora $y=f(x)$ e $y=g(x)$ differiscono per una costante.

Dim

Consideriamo $z(x)=f(x)-g(x)$ allora $z'(x)=f'(x)-g'(x)$

Siccome per ipotesi $f'(x)=g'(x) \Rightarrow z'(x)=0$ $\forall\, x\in(a,b)$

Quindi $z(x)=K$, $K\in\mathbb{R} \Rightarrow K=f(x)-g(x)$

TEOREMA DI CAUCHY

Siano $y=f(x)$ e $y=g(x)$ due funzioni continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b), $g'(x)\neq 0 \ \forall x\in(a,b)$. Allora $\exists$ almeno un punto $c\in[a,b]$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DIM

Consideriamo $F(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$

- $F(x)$ è continua in $[a,b]$ (perché composta da due funzioni continue in $[a,b]$)
- $F(x)$ è derivabile in (a,b) (perché formata da funzioni derivabili in (a,b)).
- $F(a)=f(a)[g(b)-g(a)]-g(a)[f(b)-f(a)]=$

$$=f(a)g(b)-\cancel{f(a)g(a)}-g(a)f(b)+\cancel{g(a)f(a)}\Rightarrow$$

$$F(a)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$$

$$F(b)=f(b)[g(b)-g(a)]-g(b)[f(b)-f(a)]=$$

$$=\cancel{f(b)g(b)}-f(b)g(a)-\cancel{f(b)g(b)}+f(a)g(b)\Rightarrow$$

$$F(b)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$$

=

$$F(a)=F(b)$$

La funzione $y=F(x)$ verifica le condizioni del teorema di Rolle allora $\exists$ almeno un punto $c\in(a,b)$ tale che $F'(c)=0 \Rightarrow$

$$f'(x)\big(g(b)-g(a)\big)-g'(x)\big(f(b)-f(a)\big)=0$$

$$f'(x)\big(g(b)-g(a)\big)=g'(x)\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$