

TEOREMA DI ROLLE

1^a ipotesi

2^a ipotesi

Data la funzione $y=f(x)$ in (a,b) se $f(a)=f(b)$ allora $f'(c)=0$

continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) Tale che

3^a ipotesi

tesi

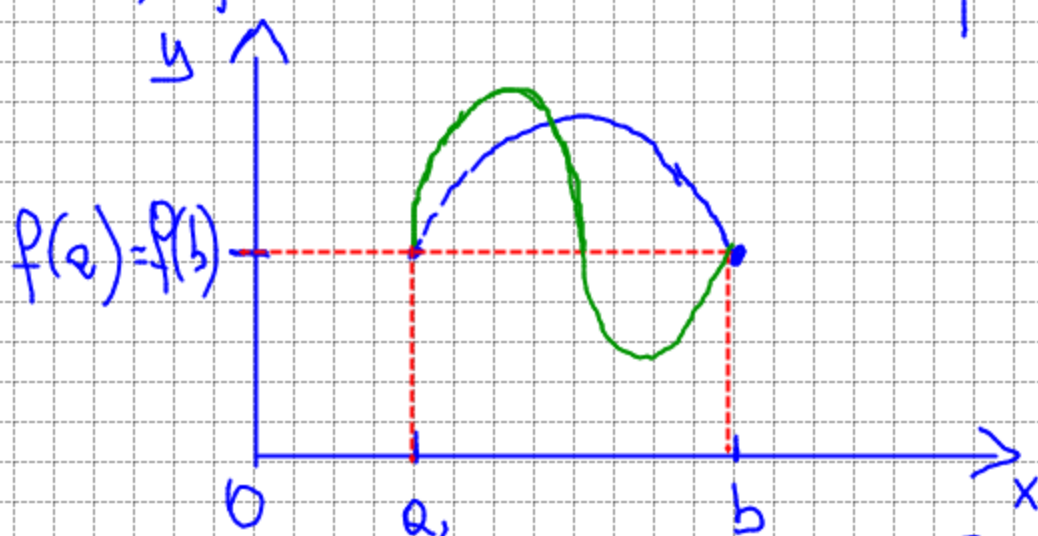
Dim

Ipotesi:

- 1) $y=f(x)$ continua in $[a,b]$
- 2) $y=f(x)$ derivabile in (a,b)
- 3) $f(a)=f(b)$

Tesi:

\exists almeno $c \in (a,b)$ / $f'(c)=0$



Si come $y=f(x)$ è continua in $[a,b]$ allora per il teorema di Weierstrass essa assume massimo M o minimo m in $[a,b]$: cioè $\exists e, d \in [a,b]$ con $m = f(e) \leq f(x) \leq f(d) = M \quad \forall x$

• se $m=M$ allora $m = f(e) = f(x) = f(d) = M \quad \forall x \in [a,b]$ quindi $y=f(x)$ è la funzione costante.

• se $m \neq M$ $m < M$ allora $y=f(x)$ non è costante e siccome per ipotesi $f(a)=f(b)$, almeno uno dei valori e e d sarà interno all'intervallo (a,b) ; supponiamo $e \in (a,b)$ allora

$$f(e+h) \geq f(e)$$

Quindi

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f(e+h)-f(e)}{h} \geq 0 \text{ per } h > 0 \\ \frac{f(e+h)-f(e)}{h} \leq 0 \text{ per } h < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow siccome $y=f(x)$ è continua e derivabile in (a,b) allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h)-f(e)}{h} = f'(e) = 0$$

ponendo $e=c$ ha dimostrato il teorema.

ESEMPIO

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x \quad I = [0, \pi]$$

Verificare se $y = f(x)$ verifica il Teorema di Rolle e in caso affermativo trovare i punti $c \in I$

Verifico le ipotesi del Teorema di Rolle:

1) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ è continua in $I = [0, \pi]$.

2) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ $f'(x) = 2 \sin x \cos x - \cos x$, $f(x)$ è derivabile in $(0, \pi)$

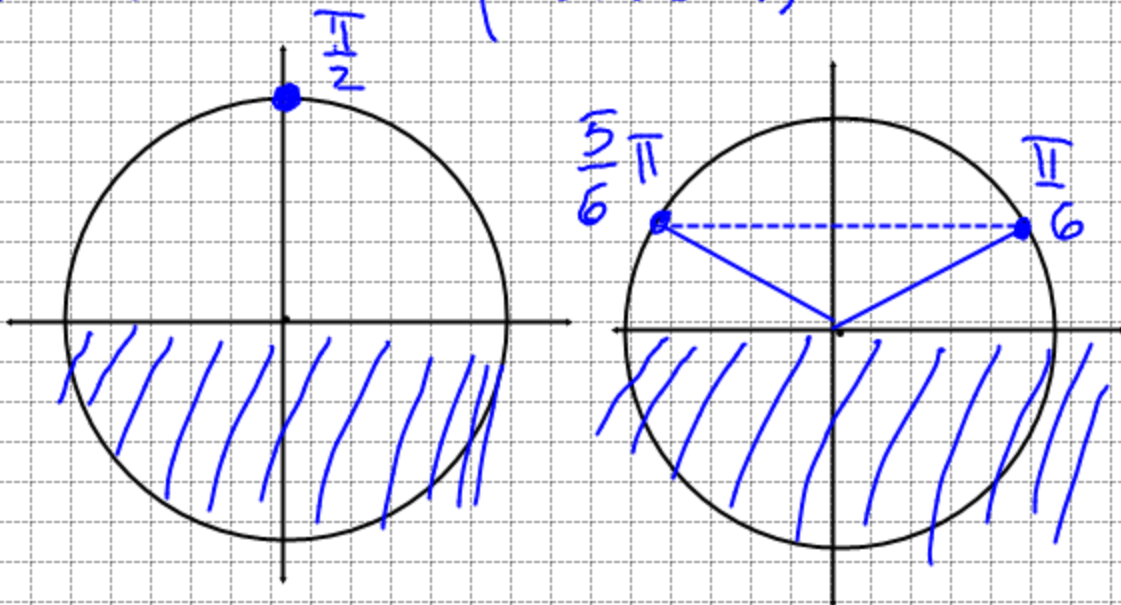
3) $f(0) = \sin^2 0 - \sin 0 = 0$ $f(\pi) = \sin^2 \pi - \sin \pi = 0$ $f(0) = f(\pi)$

Allora \exists almeno $c \in (0, \pi) / f'(c) = 0$

$$2 \sin c \cos c - \cos c = 0 \quad \cos c (2 \sin c - 1) = 0$$

$$\cos c = 0$$

$$\sin c = \frac{1}{2}$$



$$c_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$c_2 = \frac{\pi}{6}$$
$$c_3 = \frac{5\pi}{6}$$