TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA

Teorema

Data $y=f(x)$ definita in I ed ivi invertibile e la sua funzione inversa è $x=f^{-1}(y)$. Se $y=f(x)$ è derivabile in I e $f'(x)\neq 0 \ \forall x\in I$, allora anche $x=f^{-1}(y)$ è derivabile e

$$D\left[f^{-1}(y)\right]=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{con } x=f^{-1}(y)$$

Dim

Consideriamo un incremento di x e lo chiamiamo Δx.
La funzione $y=f(x)$ subirà un incremento Δy tale che
$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$
Quindi $f(x+\Delta x) = \Delta y + f(x) = \Delta y + y$
se $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ perché $y=f(x)$ è continua

Applichiamo la definizione di derivata ricordando che
$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$.

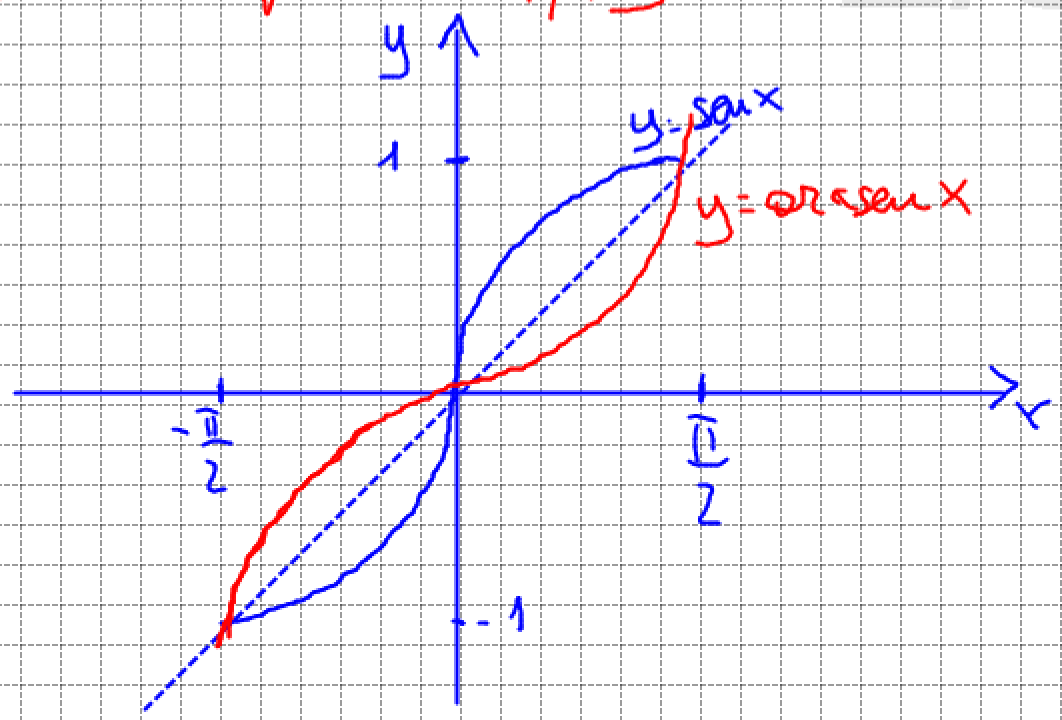
$$D\left[f^{-1}(y)\right]=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{-1}(f(x+\Delta x))-x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}}{f(x+\Delta x)-f(x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$$

DERIVATE DELLE FUNZIONI INVERSE DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

1) $y = \text{arcsen}\, x \qquad \forall x \in [-1;1]$



la funzione inversa di $y = \text{arcsen}\, x$ è $x = \text{sen}\, y$ che è derivabile in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ con derivata non nulla.

$$D(\text{arcsen}\, x) = \frac{1}{D(\text{sen}\, y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{D(\text{arcsen}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

2) $y = \arccos x \qquad \forall x \in [-1;1]$

la funzione inversa di $y = \arccos x$ è $x = \cos y$ derivabile $\forall y \in (0;\pi)$ con derivata non nulla.

$$D(\arccos x) = \frac{1}{D(\cos y)} = \frac{1}{-\text{sen}\, y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3) $y = \operatorname{arctg} x \quad \forall\, x \in [-1; 1]$

la funzione inversa di $y = \operatorname{arctg} x$ è $x = \operatorname{tg} y$, derivabile $\forall\, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ con derivata non nulla.

$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{D(\operatorname{tg} y)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\boxed{D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

4) $y = \operatorname{arcctg} x \quad \forall\, x \in [0; \pi]$

la funzione inversa di $y = \operatorname{arcctg} x$ è $x = \operatorname{ctg} y$ derivabile $\forall\, y \in (0; \pi)$ con derivata non nulla.

$$D(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{D(\operatorname{ctg} y)} = \frac{1}{\frac{-\operatorname{sen}^2 y - \cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{-(\operatorname{ctg}^2 y + 1)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{D(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}}$$