

EQUAZIONI LINEARI IN $\sin x$ E $\cos x$

Una equazione lineare è del tipo:

$$(1) \quad a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

- se $a=0$ $b \cos x + c = 0$ OK!

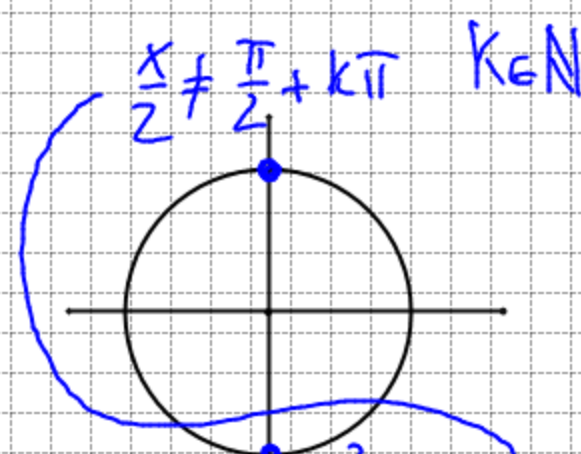
- se $b=0$ $a \sin x + c = 0$ OK!

- se $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

RISOLUZIONE ALGEBRICA:

nella (1) poniamo $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
con $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (questa impostazione è valida per $x \neq \pi + 2k\pi$)

Così facendo la (1) diventa equazione in funzione di t di secondo grado. Lo si risolve e poi si trova x .



ESEMPIO

$$\sin x - \cos x - 1 = 0$$

pongo $\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad x \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \quad \cos \frac{x}{2} \neq 0$
 $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{se } x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sin \pi - \cos \pi - 1 = 0$$
$$0 - (-1) - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0 \quad \text{VERO!}$$

$$\text{Soluzione}_1: x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

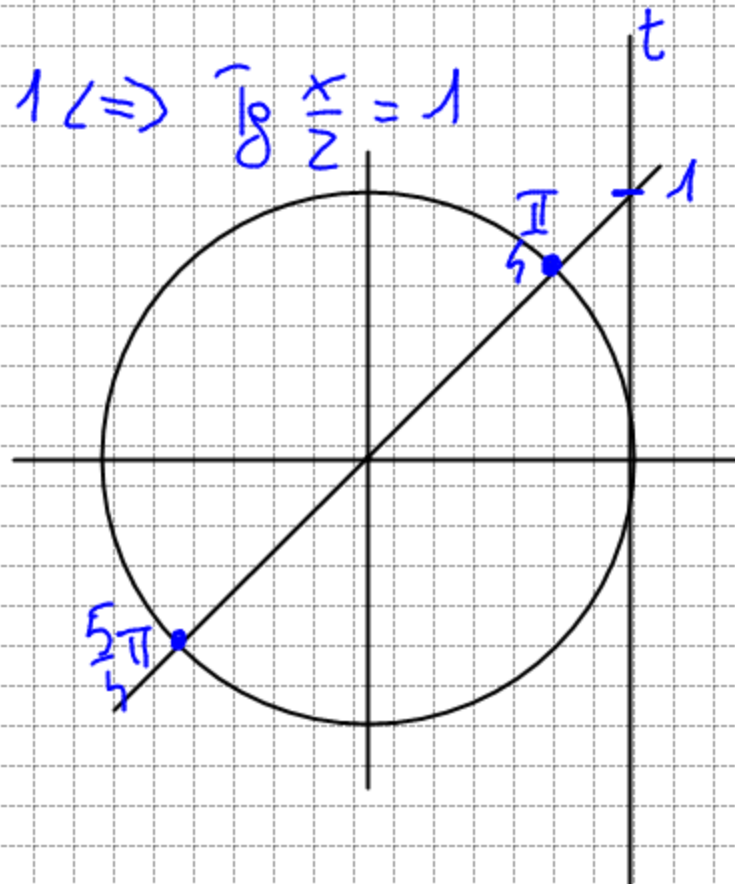
$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$$

$$\frac{2t - 1 + t^2 - 1 - t^2}{1+t^2} = 0$$

$$\frac{2(t-1)}{1+t^2} = 0$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$



$$\text{Soluzione}_2: x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

RISOLUZIONE GRAFICA

$$(1) a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\text{poniamo } \begin{cases} \sin x = Y \\ \cos x = X \end{cases}$$

La (1) diventa $aY + bX + c = 0$; si mette a sistema con la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 e si trovano i punti di intersezione tra retta e circonferenza ovvero si risolve il sistema:

$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{R.G.: } \text{poniamo } \begin{cases} \sin x = Y \\ \cos x = X \end{cases} \quad \begin{cases} Y - X - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

circonf. goniometrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$Y^2 + X^2 = 1$$

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ X^2 + X^2 + 2X = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} Y = X + 1 \\ 2X(X + 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = -1 \end{cases}$$

$$S(1) \begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}}$$

$$S(2) \begin{cases} X = -1 \\ Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \boxed{x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}}$$

