LA CONTINUITÀ E LA DERIVABILITÀ

Teorema

Se una funzione $y=f(x)$ è derivabile in $x=x_0$, allora $y=f(x)$ è continua in $x=x_0$. Non è vero il viceversa (vedere il controesempio con $f(x)=|x|$)

Dim Sappiamo per ipotesi che $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h$$

Passo al limite per $h\to 0$ a destra e sinistra dell'uguale ed ho:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\underbrace{\lim_{h\to 0} f(x_0)}_{f(x_0)}+\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ f'(x_0)}\cdot h=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)\cdot 0=f(x_0)$$

Quindi $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ ora se pongo $x_0+h=x \Rightarrow$ se $h\to 0$, $x\to x_0$

quindi $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$ definizione di continuità di $y=f(x)$ per $x=x_0$.

DERIVABILITÀ $\Longrightarrow$ CONTINUITÀ

DERIVABILITÀ $\not\Longleftarrow$ CONTINUITÀ