FUNZIONI CONTINUE

Def: Una funzione $y=f(x)$ è CONTINUA in $x_0 \in D_f$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Def: Una funzione $y=f(x)$ è CONTINUA A SINISTRA (A DESTRA) in $x_0 \in D_f$ se

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm)$$

OSSERVAZIONE Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non presenta problemi (denominatore $=0$, radici di argomenti <0, logaritmi di termini <0 ecc).

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{3^{2+\sin x+\log_3(1+\operatorname{tg} x)}}{\cos(\operatorname{arctg} x)}}_{f(x)} = \left[\frac{3^{2+0+0}}{1}\right] = 9$$

DISCONTINUITÀ

I SPECIE

Sia $y=f(x)$ una funzione e sia $x_0 \in D_f$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$ $\quad l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

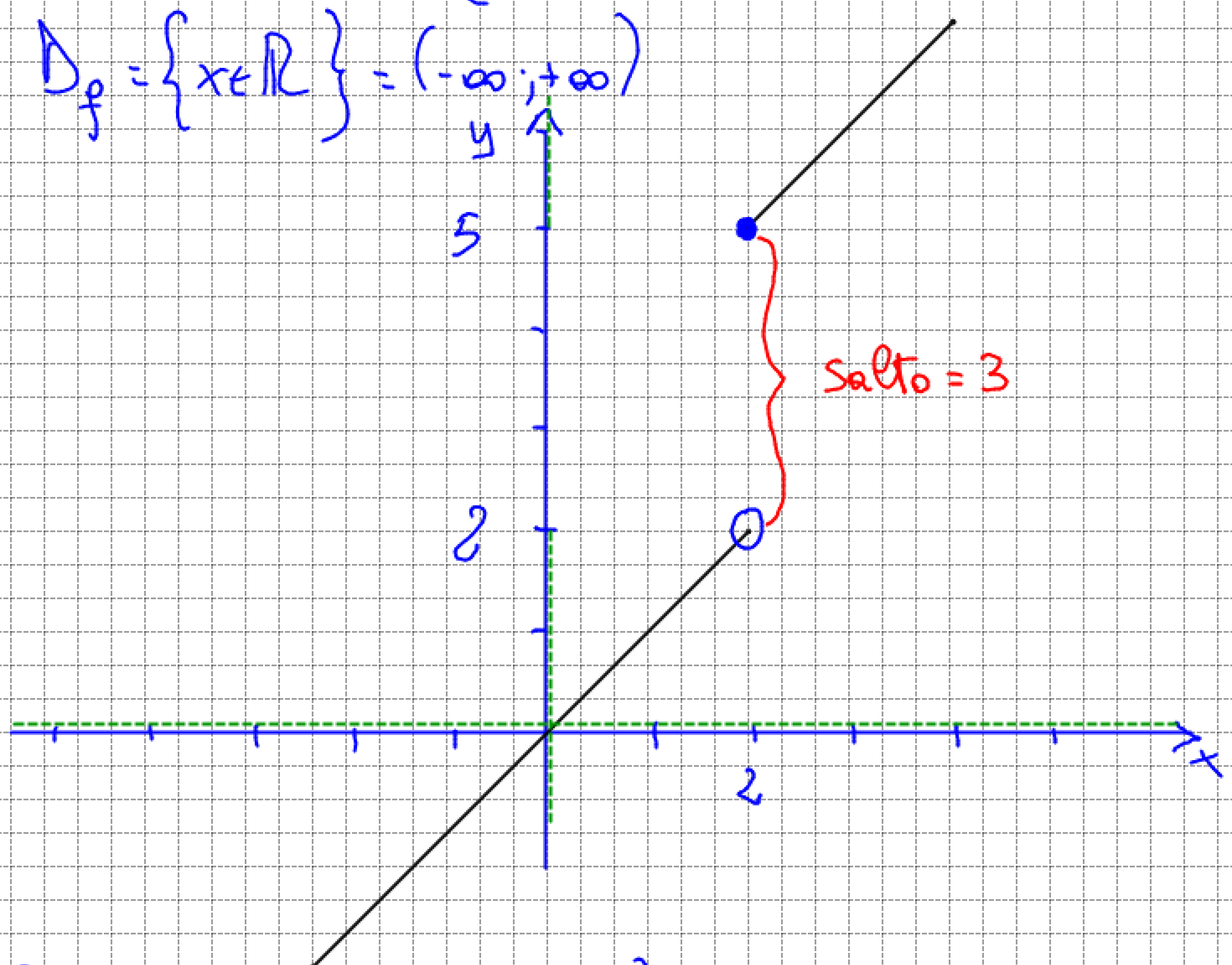
Allora la funzione $y=f(x)$ è <u>discontinua</u> in $x=x_0$ e

$$|l_2 - l_1| = \text{salto}$$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 2 \\ x+3 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$$



$f(2) = 2+3 = 5$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x = 2^-$

DISCONTINUITÀ DI I SPECIE

SALTO = 3

II SPECIE

Sia $y=f(x)$ una funzione, D_f il suo dominio e sia $x_0 \in D_f$.
Allora se $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ valgono ∞ oppure non esistono (almeno uno dei due), la funzione nel punto ha una discontinuità di II SPECIE.

ESEMPIO

$y = e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad D_f = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0\right] = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \infty\right] = +\infty \end{array}\right\} \text{DISCONT. II SPECIE}$$

III SPECIE (ELIMINABILE)

Sia $y=f(x)$ una funzione, D_f il suo dominio e x_0 un punto tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e la funzione in x_0 o non esiste oppure $f(x_0) \neq l$. Allora la funzione $y=f(x)$ ha in x_0 una discontinuità di III SPECIE (ELIMINABILE).

ESEMPIO

$y = \frac{2x^2-8}{x-2}$ $\qquad D_f = \{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq 2\} = (-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$ tranne che per $x=2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & \text{per } x\neq 2 \\ 8 & \text{per } x=2 \end{cases}$$