TEOREMI

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Sia $y = f(x)$ una funzione tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora questo limite è unico.

Dim

Supponiamo per assurdo che ℓ non è unico $\Rightarrow \exists\, \ell' \neq \ell$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell'$. Supponiamo $\ell' > \ell$.

Siccome $\varepsilon > 0$ lo scegliamo a piacere (piccolo), considero $\varepsilon < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$.

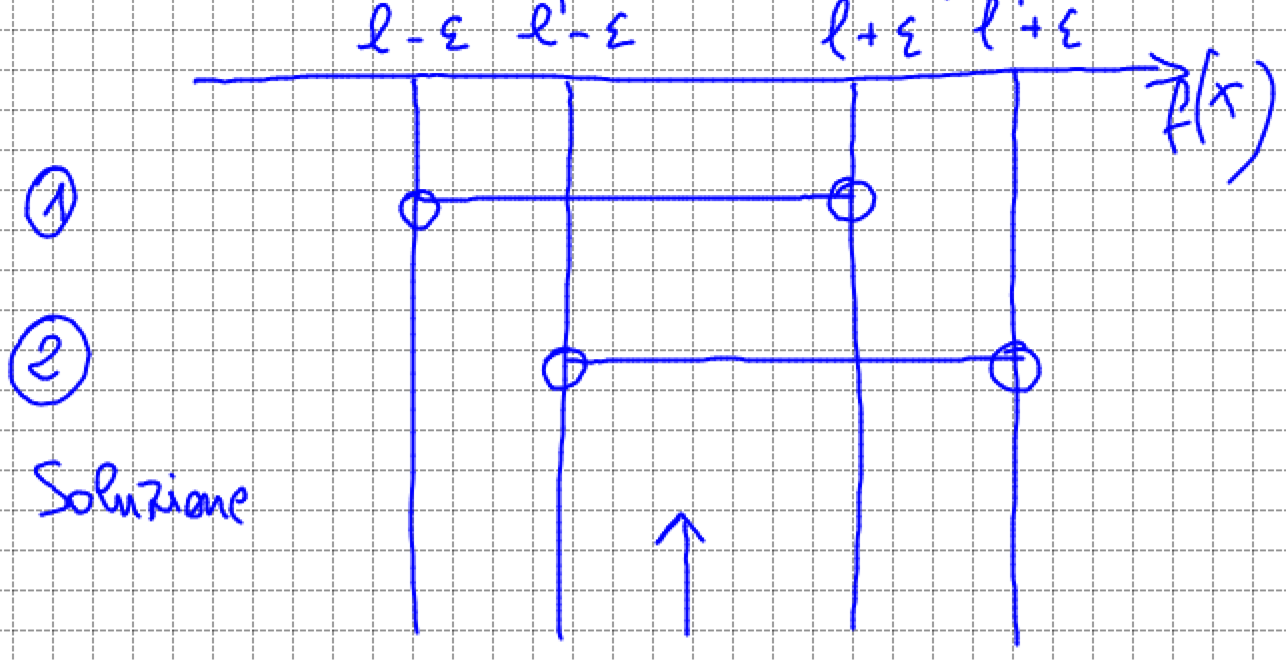
Applichiamo la definizione di limite a entrambi i casi:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, I_\varepsilon(\ell)$ e corrispon. $\exists\, I_\sigma(x_0) \,/\, \forall x \in I_\sigma(x_0)$ [cioè $|x - x_0| < \sigma$] si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell' \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, I_\varepsilon(\ell')$ e corrispon $\exists\, I_{\sigma'}(x_0) \,/\, \forall x \in I_{\sigma'}(x_0)$ [cioè $|x - x_0| < \sigma'$] si ha che $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$

$I_\sigma(x_0) \cap I_{\sigma'}(x_0)$ è un intorno di x_0, allora in questo intorno devono valere contemporaneamente le due disequazioni e cioè:

$$\begin{cases} |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{cases} \quad \forall x \in I_\sigma(x_0) \cap I_{\sigma'}(x_0)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon \\ -\varepsilon < f(x) - \ell' < \varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} ① \ \ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \\ ② \ \ \ell' - \varepsilon < f(x) < \ell' + \varepsilon \end{cases}$$



$$\ell' - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \iff \ell' - \varepsilon < \ell + \varepsilon$$

$$\varepsilon > \frac{\ell' - \ell}{2} \quad \text{ASSURDO!}$$

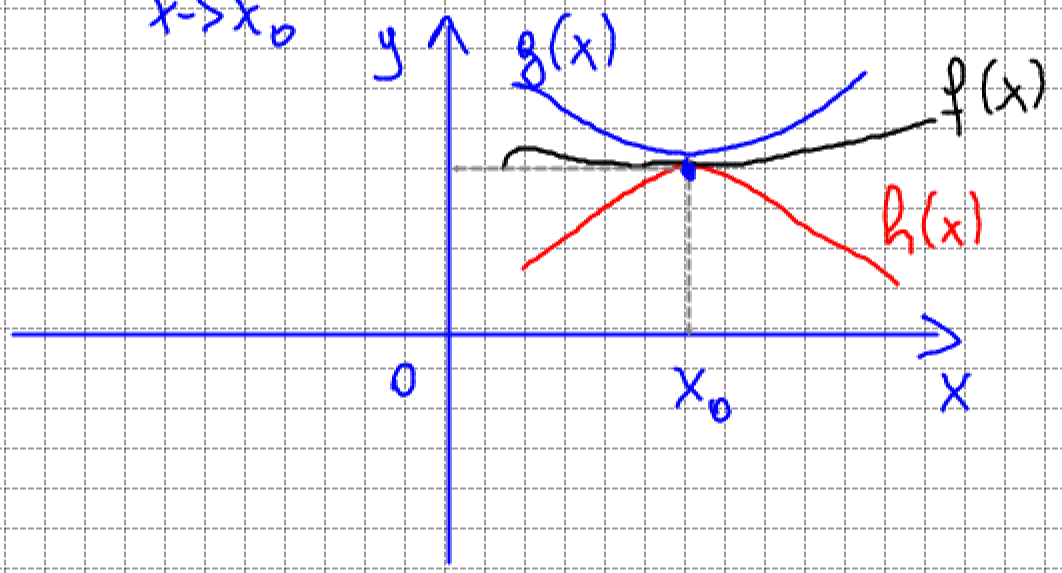
TEOREMA DEL CONFRONTO

Siano $y=f(x)$; $y=g(x)$, $y=h(x)$ Tre funzioni definite in $D \subseteq \mathbb{R}$ escluso al più x_0. Se in ogni punto, escluso x_0, si ha:

$$h(x) \le f(x) \le g(x) \quad e$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

Allora anche $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$



Dim

- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists I_\varepsilon(\ell)$ e corrisp. $\exists I_\sigma(x_0) \,/\, \forall x \in I_\sigma(x_0)$ si ha $|h(x) - \ell| < \varepsilon$
- $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists I'_\varepsilon(\ell)$ e corrisp. $\exists I'_\sigma(x_0) \,|\, \forall x \in I'_\sigma(x_0)$ si ha che $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

In $I_\varepsilon(\ell) \cap I'_\varepsilon(\ell)$ si ha che

$$\begin{cases} |h(x) - \ell| < \varepsilon \\ |g(x) - \ell| < \varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} -\varepsilon < h(x) - \ell < \varepsilon \\ -\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \end{cases}$$

Siccome per ipotesi

$h(x) \le f(x) \le g(x)$, si ha che:

$I_\sigma(x_0) \cap I'_\sigma(x_0)$

$$\ell - \varepsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in \bar{I}$$

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Data $y=f(x)$ funzione e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ allora
$\exists\, I(x_0)$ in cui $f(x)$ ed ℓ sono entrambi positivi (opp. entrambi negativi) $\Leftrightarrow \left[f(x) \cdot \ell > 0 \right]$

Dim

- $\boxed{\ell > 0}$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, I_\varepsilon(\ell)$ e corrispond.
$\exists\, I_\sigma(x_0)\ /\ \forall\, x \in I_\sigma(x_0)$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Siccome ε lo scegliamo a piacere ($\varepsilon > 0$), poniamo $\varepsilon = \ell$
quindi $|f(x) - \ell| < \ell \Leftrightarrow -\ell < f(x) - \ell < \ell \Leftrightarrow$
$\boxed{0 < f(x)} < 2\ell$

- $\boxed{\ell < 0}$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, I_\varepsilon(\ell)$ e corrispond.
$\exists\, I_\sigma(x_0)\ /\ \forall\, x \in I_\sigma(x_0)$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Siccome ε lo scegliamo a piacere ($\varepsilon > 0$), poniamo $\varepsilon = -\ell$
quindi $|f(x) - \ell| < -\ell \Leftrightarrow \ell < f(x) - \ell < -\ell \Leftrightarrow$
$2\ell < \boxed{f(x) < 0}$