EQUAZIONI LINEARI IN sen x E cos x

Una equazione lineare è del tipo:

(1) $\boxed{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

- se $a = 0$ $\quad b \cos x + c = 0$ OK!
- se $b = 0$ $\quad a \operatorname{sen} x + c = 0$ OK!
- se $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

RISOLUZIONE ALGEBRICA:

nella (1) poniamo $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

con $t = \operatorname{Tg} \dfrac{x}{2}$ (questa imposizione è valida per $x \neq \pi + 2k\pi$)

Così facendo la (1) diventa equazione in funzione di t di secondo grado. La si risolve e poi si trova x.

ESEMPIO

$$\operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0$$

pongo $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ $\quad t = \operatorname{Tg} \dfrac{x}{2}$

$\operatorname{Tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ $\quad \cos \dfrac{x}{2} \neq 0$ $\quad \dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$x \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$

se $x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow \operatorname{sen} \pi - \cos \pi - 1 = 0$

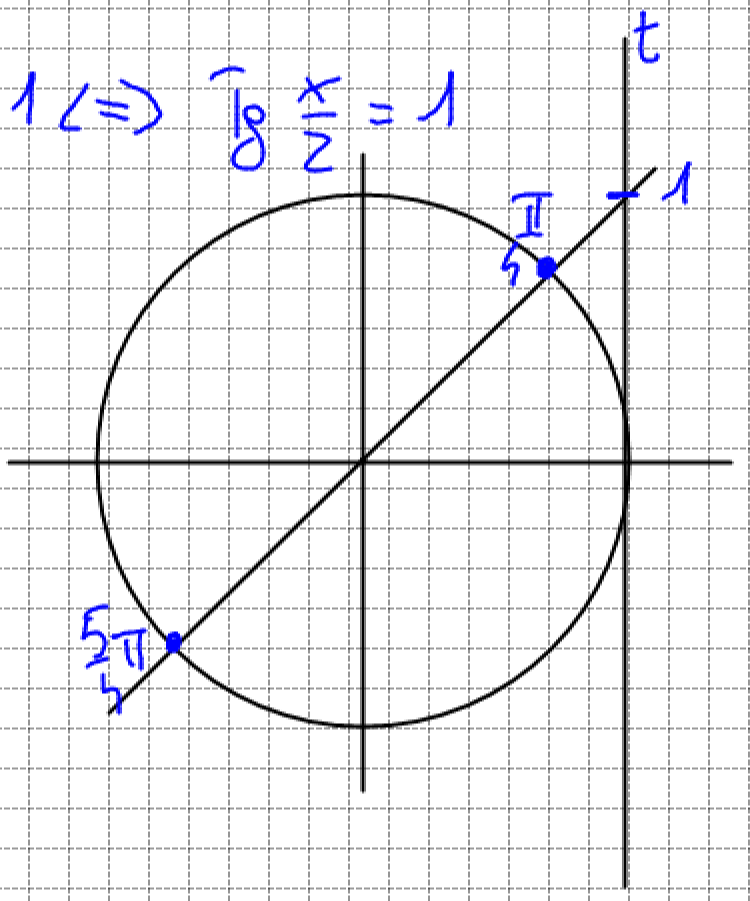
$$0 - (-1) - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0 \quad \text{VERO!}$$

$\boxed{\text{Soluzione}_1: \; x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}}$

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0 \qquad \frac{2t - 1 + \cancel{t^2} - 1 - \cancel{t^2}}{1+t^2} = 0$$

$$\frac{2(t-1)}{\cancel{1+t^2}} = 0 \qquad t = 1 \iff \operatorname{Tg} \frac{x}{2} = 1$$



$\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Soluzione}_2: \; x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}}$

RISOLUZIONE GRAFICA

(1) $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0, \; b \neq 0$

poniamo $\begin{cases} \operatorname{sen} x = Y \\ \cos x = X \end{cases}$

la (1) diventa $aY + bX + c = 0$; si mette a sistema con la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 e si trovano i punti di intersezione tra retta e circonferenza ovvero si risolve il sistema:

$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$