SUCCESSIONI NUMERICHE

Df: Data $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad n \longmapsto a_n$ è detta successione che va da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ cioè successione di numeri naturali in numeri reali

- Le successioni possono essere definite per ricorrenza dando il primo termine e la legge che lega ad ogni termine il successivo.

ESEMPIO

a) $a_0 = 2$; $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$

Si ha $a_0 = 2$; $a_1 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$; $a_2 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $a_3 = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{1}{4}$ ....

b) $a_0 = -1$, $a_{n+1} = -(a_n + 1)^n$

Si ha $a_0 = -1$; $a_1 = -(a_0+1)^0 = -(0)^0 = 0$; $a_2 = -(a_1+1)^1 = -1$

$a_3 = -(a_2+1)^2 = -(0)^0 = 0$; $a_4 = -(a_3+1)^2 = -1$ ....

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\mathbb{N}$ - insieme dei numeri naturali

P_n = affermazione che contiene al suo interno un parametro $n \in \mathbb{N}$ e che a seconda dei valori di n può essere vera o falsa.

ESEMPIO

1) $n^2 = n + 6$ (vera per $n=3$; falsa per $n = 4, \ldots$)

2) $2^n \geq n + 6$ (vera per $n=4$; falsa per $n = 3, \ldots$)

Obiettivo: quello di stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha che P_n è vera.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

- Sia P_n come sopra definita.

Supponiamo che

PASSO BASE ← (i) P_0 è vera (sostituendo $n=0$ ottengo un'affermazione)

PASSO INDUTTIVO ← (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, se P_n è vera, allora anche P_{n+1} è vera (se è vera una, è vera la successiva)

Allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dim:

P_0 è vera per (i).

Uso (ii) con $n=0$. Essendo P_0 vera, sarà vera anche P_1.

Uso (ii) con $n=1$. Essendo P_1 vera, sarà vera anche P_2.

-----

e così via.

ESEMPIO

Dimostrare che $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Dim

(i) PASSO BASE $\quad n=0 \Rightarrow 0 = \frac{0(0+1)}{2} \quad 0=0$ ok.

(ii) PASSO INDUTTIVO $\quad$ Supponiamo vera P_n cioè

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Verifico P_{n+1}:

$$0+1+2+\dots+n+(n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$0+1+2+\dots+n+(n+1) = [0+1+2+\dots+n]+(n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{n} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

OSS: L'induzione insegna a dimostrare una data formula, ma non insegna a ricavare la formula.

ESEMPIO

$$0^2+1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dim

PASSO BASE (i) $n=0$ $\quad 0^2=\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ $\quad 0=0$ ok

PASSO INDUTTIVO (ii) Supponiamo vera P_n cioè

$$0^2+1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

verifico P_{n+1}:

$$0^2+1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2\overset{?}{=}\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\left[0^2+1^2+2^2+\dots+n^2\right]+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{2n^3+2n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{2n^3+10n^2+13n+6}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{(2n+3)(n+1)(n+2)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ESEMPIO

1) $0^3+1^3+2^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ESERCIZIO

2) $1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ con $q\neq 1$ ESERCIZIO