INFINITESIMI E INFINITI

Def: Si dice che f è un infinitesimo per $x \to x_0$ se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = 0}$$

CONFRONTO FRA INFINITESIMI

Siano f e g due funzioni infinitesime per $x\to x_0$ ($\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$), supponiamo che $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ allora

- se $\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto a $g(x)$
- se $\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \neq 0$ diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine
- se $\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty$ diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine minore rispetto a $g(x)$

Def: Si dice che f è un infinito per $x \to x_0$ se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty}$$

CONFRONTO FRA INFINITI

Siano f e g due funzioni infinite per $x \to x_0$ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty\right)$, supponiamo che $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ allora

- se $\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=\infty$ diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine maggiore rispetto a $g(x)$
- se $\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=\ell\neq 0$ diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine
- se $\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=0$ diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine minore rispetto a $g(x)$

ESEMPIO

$f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ per $x \to 0$ che ordine di infinitesimo è?

Confronto $f(x)$ con $g(x)=x^\alpha$ e trovo α tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell \neq 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^\alpha} = \ell \neq 0$$

ponendo $\alpha = 2$ ho $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} = 1 \neq 0$

Quindi diciamo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 2 perché messo a confronto con $g(x)=x^2$ ottengo che il limite del rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ per $x \to 0$ è un numero diverso da zero.

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{4-x^4} - 2$ per $x \to 0$ che ordine di infinitesimo è?

Per $x \to 0$ $f(x) \to 0$ quindi $f(x)$ è un infinitesimo.

Considero $g(x) = |x|^\alpha$ e confronto $g(x)$ con $f(x)$ per $x \to 0$,

quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left|\sqrt{4-x^4} - 2\right|}{|x|^\alpha} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|4-x^4+2|}{|x|^\alpha \left|\sqrt{4-x^4}+2\right|} = \lim_{x \to 0} \frac{|2-x^4|}{|x|^\alpha \left|\sqrt{4-x^4}+2\right|} =$$

$\xrightarrow{x \to 0} |x|^4$

$$\sqrt{4\left(1-\frac{x^4}{4}\right)} - 2 = 2\left(\sqrt{1-\frac{x^4}{4}} - 1\right) \overset{x \to 0}{\cong} \frac{x^4}{4}$$

sottointende la razionalizzazione

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|^{4-\alpha}}{\left|\sqrt{4-x^4}+2\right|} =$$

- $4-\alpha > 0$ $\quad \alpha < 4$ $\quad = 0$
- $4-\alpha = 0$ $\quad \alpha = 4$ $\quad = \frac{1}{4}$
- $4-\alpha < 0$ $\quad \alpha > 4$ $\quad = \infty$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \qquad (a\in\mathbb{R}^+) \qquad \left(\frac{0}{0}\right) \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(x-a)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{x-a}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$